ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je s t označena duljina tanje i dulje, a s d duljina deblje i kraće svijeće.
Za 1 sat izgorjet će

$\frac{t}{3.5}=\frac{2}{7}t$ dijela dulje svijeće i — 1 BOD

$\frac{1}{5}d$ dijela deblje svijeće. — 1 BOD

Za 2 sata izgorjet će

$\frac{4}{7}t$ dijela dulje svijeće i — 1 BOD

$\frac{2}{5}d$ dijela deblje svijeće. — 1 BOD

Nakon 2 sata gorenja ostat će

$t-\frac{4}{7}t=\frac{3}{7}t$ dulje svijeće i — 1 BOD

$d-\frac{2}{5}d=\frac{3}{5}d$ kraće svijeće. — 1 BOD

Kako su nakon 2 sata gorenja duljine jednake, možemo pisati

$\frac{3}{7}t=\frac{3}{5}d$ — 1 BOD

$\frac{t}{7}=\frac{d}{5}$

$\frac{t}{d}=\frac{7}{5}$ — 1 BOD

$t:d=7:5$ — 1 BOD

Omjer duljine dulje svijeće prema duljini kraće svijeće je 7 : 5. — 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

2. Brojevi se općenito mogu birati na dva različita načina:
a) redoslijed izbora brojeva nije važan;
b) redoslijed izbora brojeva je važan!

Prvi način (redoslijed izbora brojeva nije važan):

Tri različita broja mogu se birati na $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}=84$ različitih načina. — 2 BODA

Zbroj triju različitih brojeva može biti 6, 9, 12, 15, 18, 21 ili 24. — 1 BOD

Ako zbroj brojeva iznosi:

- 6

  Trojka koja odgovara tom uvjetu je: $\{1,2,3\}$.

- 9
  Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su: $\{1,2,6\}$, $\{1,3,5\}$ i $\{2,3,4\}$.
- 12
  Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
  $\{1,2,9\}$, $\{1,3,8\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,4,6\}$ i $\{3,4,5\}$.
- 15
  Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
  $\{1,5,9\}$, $\{1,6,8\}$, $\{2,4,9\}$, $\{2,5,8\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,8\}$,$\{3,5,7\}$ i $\{4,5,6\}$.
- 18
  Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su:
  $\{1,8,9\}$, $\{2,7,9\}$, $\{3,6,9\}$, $\{3,7,8\}$, $\{4,5,9\}$, $\{4,6,8\}$ i $\{5,6,7\}$.
- 21
  Trojke koje odgovaraju tom uvjetu su: $\{4,8,9\}$, $\{5,7,9\}$ i $\{6,7,8\}$.
- 24
  Trojka koja odgovara tom uvjetu je: $\{7,8,9\}$. 5 BODOVA

Ukupno ima 30 povoljnih trojki pa je tražena vjerojatnost $p=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$. 2 BODA

………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako se slijedi ideja ispisivanja trojki kojima je zbroj djeljiv s 3, svakih 6 dobro ispisanih trojki treba bodovati s JEDNIM BODOM.
Pokušaj izračunavanja tražene vjerojatnosti (povoljni / mogući) treba bodovati s JEDNIM BODOM.

Drugi način (redoslijed izbora brojeva nije važan):

Tri različita broja mogu se birati na $\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}=84$ različitih načina. 2 BODA

Zbroj triju brojeva je djeljiv brojem 3 u jednom od sljedeća dva slučaja:
(i) sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3,
(ii) tri broja daju ostatke 0, 1, 2 pri dijeljenju brojem 3 (potpun sustav ostataka modulo 3). 1 BOD
Tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju s 3 ako je izvučena jedna od kombinacija brojeva: {1, 4, 7} ili {2, 5, 8} ili {3, 6, 9}, tj. postoje 3 mogućnosti. 2 BODA
Za dobivanje potpunog sustava ostataka modulo 3 imamo $3^3 = 27$ mogućnosti (3 mogućnosti za odabir broja djeljivog s 3, 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 i 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3). 3 BODA

Tražena vjerojatnost je $p=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$. 2 BODA

………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način (redoslijed izbora brojeva je važan):
Broj ukupnih mogućnosti izbora tri različita broja (ako pazimo na njihov redoslijed) je
$9\cdot8\cdot7=504$. 2 BODA
Zbroj triju brojeva je djeljiv brojem 3 u jednom od sljedeća dva slučaja:
(i) sva tri broja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3;
(ii) tri broja daju ostatke 0, 1, 2 pri dijeljenju brojem 3 (potpun sustav ostataka modulo 3). 1 BOD
Tri broja mogu dati isti ostatak pri dijeljenju brojem 3 ako je izvučena jedna od kombinacija brojeva: {1, 4, 7} ili {2, 5, 8} ili {3, 6, 9}. 1 BOD

Budući da je važan poredak brojeva, to je ukupno $3 \cdot 6 = 18$ mogućnosti. 1 BOD

Za dobivanje potpunog sustava ostataka modulo 3 je $3^3 \cdot 6 = 162$ mogućnosti (3 mogućnosti za odabir broja djeljivog brojem 3, 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 1 pri dijeljenju brojem 3 i 3 mogućnosti za odabir broja koji daje ostatak 2 pri dijeljenju brojem 3;
kako je **bitan** poredak, za svaku od dobivenih mogućnosti, postoji 3! = 6 mogućih permutacija).

3 BODA

Zato je tražena vjerojatnost $p = \frac{180}{504} = \frac{5}{14}$. 2 BODA

………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je u razredu x dječaka. Djevojčica je za 20 % više od tog broja, dakle ima ih $x + 0.2x = 1.2x$.

1 BOD

Iz $x + 1.2x = 22$ slijedi $2.2x = 22$, odnosno $x = 10$. 2 BODA

U razredu je 10 dječaka i 12 djevojčica. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka se vidi da u tročlanoj ekipi moraju biti ili dvije djevojčice i jedan dječak ili dva dječaka i jedna djevojčica. 1 BOD

Dvije djevojčice možemo izabrati na $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ načina, a jednog dječaka na 10 načina. 1 BOD

Tročlanu ekipu s dvije djevojčice i jednim dječakom možemo izabrati na $66 \cdot 10 = 660$ načina.

1 BOD

Dva dječaka možemo izabrati na $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ načina, a jednu djevojčicu na 12 načina. 1 BOD

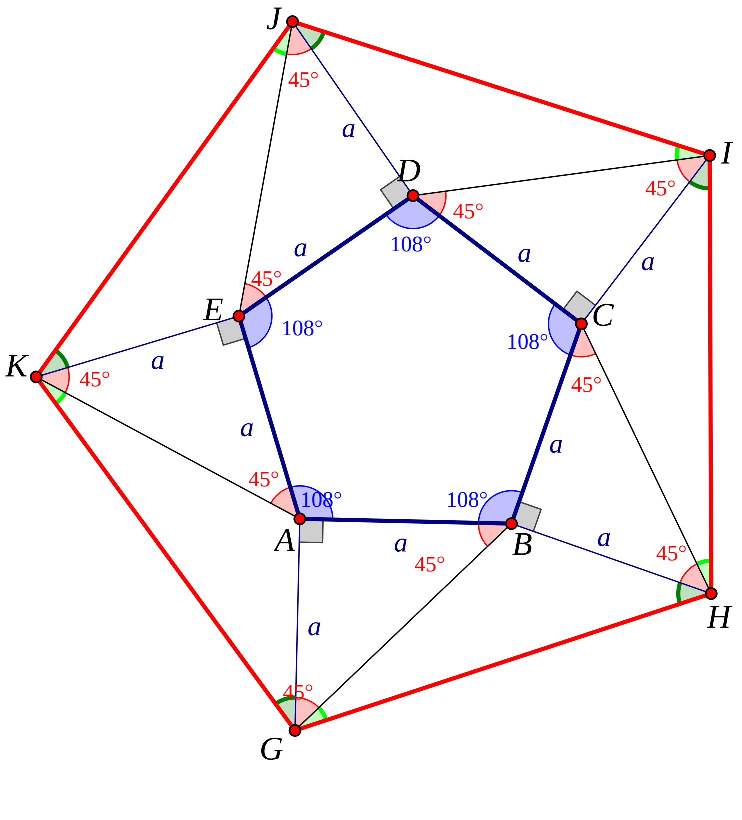
Tročlanu ekipu s dva dječaka i jednom djevojčicom možemo izabrati na $45 \cdot 12 = 540$ načina.

1 BOD

Ukupan broj različitih odabira je $660 + 540 = 1\,200$. 1 BOD

……………………………………………………………….……...……. UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica: 1 BOD



Neka je a duljina stranice pravilnog peterokuta $ABCDE$.

Veličine svih unutarnjih kutova pravilnog peterokuta su $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5}=108°$. 1 BOD

Trokuti ΔABG, ΔBCH, ΔCDI, ΔDEJ i ΔEAK su međusobno sukladni jer su to jednakokračni pravokutni trokuti s katetama duljine a. Veličine šiljastih kutova u tim trokutima su 45°. 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi:

$|GB|=|HC|=|ID|=|JE|=|KA|$ 1 BOD

$|\angle KAG|=|\angle GBH|=|IDJ|=|\angle JEK|=|\angle HCI|=360°-(108°+90°+45)°=117°$ 1 BOD

Prema poučku S-K-S trokuti ΔHBG, ΔICH, ΔJDI, ΔKEJ i ΔGAK su međusobno sukladni jer imaju po dva para sukladnih stranica i sukladne veličine kutova između tih stranica. 1 BOD

Iz ove sukladnosti slijedi:

$|GH|=|HI|=|IJ|=|JK|=|KG|$, 1 BOD

$|\angle BGH|=|\angle CHI|=|\angle DIJ|=|\angle EJK|=|\angle AKG|$,

$|\angle GHB|=|\angle HIC|=|\angle IJD|=|\angle JKE|=|\angle KGA|$. 1 BOD

Gledajući peterokut $GHIJK$, veličina kuta kod svakog od vrhova peterokuta jednaka je zbroju triju sukladnih kutova pa slijedi:

$|\angle KGH|=|\angle GHI|=|\angle HIJ|=|\angle IJK|=|\angle JKG|$. 1 BOD

Peterokut $GHIJK$ ima sve stranice jednake duljine i sve unutarnje kutove jednake veličine pa je pravilan. 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Iz nejednakosti $x > y > z > 1$ za recipročne vrijednosti brojeva x, y i z vrijedi $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}<1$. 1 BOD

Stoga je

$\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$,

odnosno $\frac{3}{z}>1 \Rightarrow z<3$. 1 BOD

Kako mora biti $z > 1$ i $z < 3$, slijedi da je $z = 2$. 1 BOD

Iz

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2}>1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$. 1 BOD

Nadalje je

$\frac{1}{y}+\frac{1}{y}>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{2}$,

odnosno $\frac{2}{y}>\frac{1}{2}$, pa je $y < 4$. 1 BOD

Kako mora biti $y > z = 2$ i $y < 4$, slijedi da je $y = 3$. 1 BOD

Iz

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}>1 \Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{6}$.

Slijedi da je $x < 6$. 1 BOD

Kako mora biti $x > y = 3$ i $x < 6$, slijedi da x može biti 4 ili 5. 1 BOD

Uređene trojke koje zadovoljavaju zadane uvjete su (4, 3, 2) i (5, 3, 2). 2 BODA

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Obje pogođene trojke, uz provjeru oba uvjeta (obje nejednakosti), treba bodovati sa 6 BODOVA, na način da se dobije po 1 BOD za svaku trojku, 2 BODA za provjeru prve nejednakosti (obje trojke) te 2 BODA za provjeru druge nejednakosti (obje trojke).

Jednu pogođenu trojku, uz provjeru oba uvjeta (obje nejednakosti), treba bodovati s 3 BODA (1 BOD za trojku, 1 BOD za provjeru prve nejednakosti, 1 BOD za provjeru druge nejednakosti).