ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2019.

6. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Marko je za knjige i bilježnice potrošio $\frac{4}{15}+\frac{7}{30}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$ svoje ušteđevine. 2 BODA

Preostalo mu je $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ njegove ušteđevine. 1 BOD

Kako $\frac{1}{5}$ njegove ušteđevine iznosi 72 kn, slijedi da je ušteđevina iznosila 72 · 5 = 360 kn.

3 BODA

Za prvu knjigu platio je $\frac{4}{15}\cdot 360=96$ kn, za drugu knjigu $\frac{7}{30}\cdot 360=84$ kn,

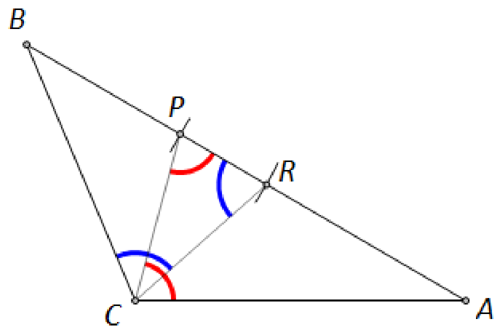
a za obje knjige zajedno 96 + 84 = 180 kn. 3 BODA

Za bilježnice je platio $\frac{3}{10}\cdot 360=108$ kn. 1 BOD

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Kako je $|AC|=|AP|$, trokut APC je jednakokračan. 1 BOD

Tada je $|\angle CPA|=|\angle ACP|$. 1 BOD

Neka je $|\angle CPA|=|\angle ACP|=\alpha$.

Kako je $|BC|=|BR|$, trokut BCR je jednakokračan. 1 BOD

Tada je $|\angle RCB|=|\angle BRC|$. 1 BOD

Neka je $|\angle RCB|=|\angle BRC|=\beta$.

Neka je $|\angle RCP|=x$.

Tada je $\alpha+\beta=112°+x$. 2 BODA

U trokutu CRP je $\alpha+\beta+x=180°$. 1 BOD

Slijedi:

$112°+x+x=180°$

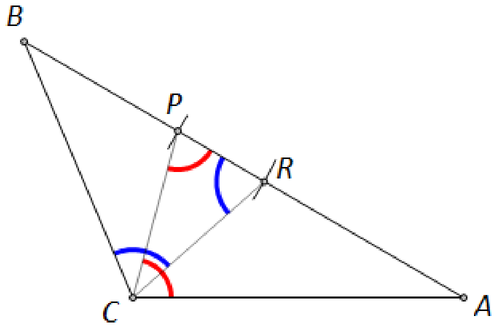
$2x = 68°$ 1 BOD

$x = |\angle RCP| = 34°$ 1 BOD

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Kako je $|AC| = |AP|$, trokut ACP je jednakokračan. 1 BOD

Tada je $|\angle CPA| = |\angle ACP|$. 1 BOD

Neka je $|\angle CPA| = |\angle ACP| = x$.

Kako je $|BC| = |BR|$, trokut BCR je jednakokračan. 1 BOD

Tada je $|\angle RCB| = |\angle BRC|$. 1 BOD

Neka je $|\angle RCB| = |\angle BRC| = y$.

Neka je $|\angle RCP| = z$, $|\angle BAC| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$.

Kako zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta iznosi 180°, u trokutima ACP i BCR slijedi

$x = \dfrac{180° - \alpha}{2}$, $y = \dfrac{180° - \beta}{2}$. 1 BOD

U trokutu PCR sada vrijedi

$x + y + z = 180°$ odnosno $\dfrac{180° - \alpha}{2} + \dfrac{180° - \beta}{2} + z = 180°$. 1 BOD

Tada je:

$$\frac{180° - \alpha + 180° - \beta}{2} + z = 180°$$

$$\frac{360° - (\alpha + \beta)}{2} + z = 180°$$

$$\frac{360° - (180° - 112°)}{2} + z = 180°$$ 1 BOD

$$146° + z = 180°$$ 1 BOD

Dakle, $|\angle RCP| = z = 34°$. 1 BOD

………………………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

3. Treba izračunati s koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2\,018 \cdot 2\,019$. 1 BOD

Broj završava sa onoliko nula koliko puta se u rastavu svih brojeva na proste faktore pojavljuje umnožak $2 \cdot 5 = 10$. 1 BOD

Kako je među brojevima manjim od 2 020 više višekratnika broja 2 nego broja 5, očito se u tom zapisu broj 2 pojavljuje više puta nego broj 5. Zato je potrebno prebrojati koliko se puta broj 5 pojavljuje u zapisu cijelog umnoška kao umnoška prostih brojeva. 1 BOD

Faktor 5 se pojavljuje u svim višekratnicima broja 5 barem jednom. Pritom se kod višekratnika broja $5 \cdot 5 = 25$ pojavljuje barem dva puta, kod višekratnika broja $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ barem tri puta. U svakom višekratniku broja $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ manjem od 2 020 faktor 5 se pojavljuje točno četiri puta. Pet puta se ne može pojaviti jer je $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$, a taj broj je veći od 2 019. 2 BODA

Višekratnika broja 5 manjih od 2 020 ima 403 jer je 2 019 : 5 = 403 i ostatak 4.
Višekratnika broja 25 manjih od 2 020 ima 80 jer je 2 019 : 25 = 80 i ostatak 19.
Višekratnika broja 125 manjih od 2 020 ima 16 jer je 2 019 : 125 = 16 i ostatak 19.
Višekratnika broja 625 manjih od 2 020 ima 3 jer je 2 019 : 625 = 3 i ostatak 144. 3 BODA

Stoga se broj 5 u rastavima na proste faktore svih brojeva iz umnoška pojavljuje
403 + 80 + 16 + 3 = 502 puta. 1 BOD

Prema tome, umnožak prvih 2 019 prirodnih brojeva završava s 502 nule. 1 BOD

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

4. Jednom točkom na pravcu određena su dva polupravca, što znači da n točaka na pravcu određuju $2n$ polupravaca. 2 BODA

Dužina je određena s dvije točke. Prva se točka može odabrati na n načina, a druga na $n - 1$ načina.

Ukupan broj dužina određenih s n točaka na pravcu je $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. 2 BODA

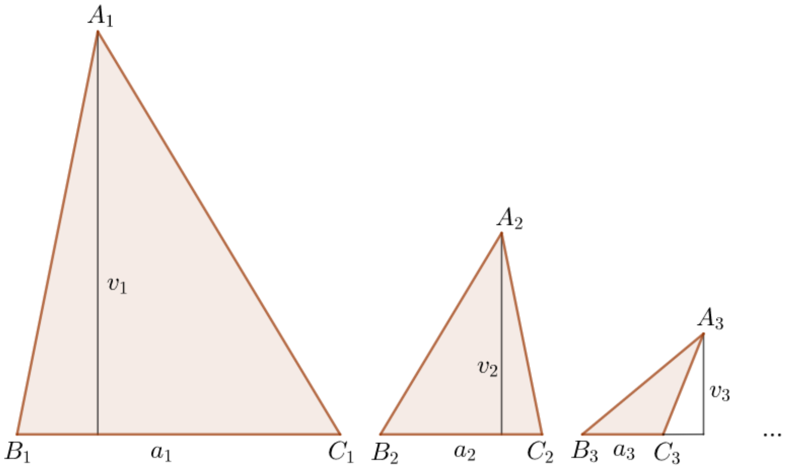
$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 20n \rightarrow n \cdot (n - 1) = 40n \rightarrow n - 1 = 40 \rightarrow n = 41$ 3 BODA

Na pravac treba smjestiti 41 točku. 1 BOD

One određuju $41 \cdot 40 : 2 = 820$ dužina. 2 BODA

…………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica:



(**Napomena:** Skica nije nužna i ne boduje se.)

Označimo s a_1 duljinu stranice prvog trokuta, a s v_1 duljinu pripadne visine u prvom trokutu.

Tada je površina tog trokuta $P_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot v_1$.

Označimo s a_2 duljinu odgovarajuće stranice drugog trokuta, a s v_2 duljinu pripadne visine u drugom trokutu. Tada je površina tog trokuta $P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot v_2$.

Kako vrijedi $a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1$ i $v_2 = \frac{1}{2} \cdot v_1$, slijedi

$P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot v_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot v_1 = \frac{1}{4} \cdot P_1$. 2 BODA

Na isti način zaključujemo

$P_3 = \frac{1}{4} \cdot P_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot P_1 = \frac{1}{16} \cdot P_1$, 1 BOD

$P_4 = \frac{1}{4} \cdot P_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} \cdot P_1 = \frac{1}{64} \cdot P_1$, 1 BOD

$P_5 = \frac{1}{4} \cdot P_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} \cdot P_1 = \frac{1}{256} \cdot P_1$, 1 BOD

$P_6 = \frac{1}{4} \cdot P_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{256} \cdot P_1 = \frac{1}{1\,024} \cdot P_1$. 1 BOD

Vrijedi:

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 4\,095$

$P_1 + \frac{1}{4} \cdot P_1 + \frac{1}{16} \cdot P_1 + \frac{1}{64} \cdot P_1 + \frac{1}{256} \cdot P_1 + \frac{1}{1\,024} \cdot P_1 = 4\,095$ 1 BOD

$P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1\,024}\right) = 4\,095$

$P_1 \cdot \frac{1\,365}{1\,024} = 4\,095$ 1 BOD

$P_1 = 4\,095 \cdot \frac{1\,024}{1\,365}$

$P_1 = 3\,072 \text{ cm}^2$ 1 BOD

$P_6 = \frac{1}{1\,024} \cdot 3\,072 = 3 \text{ cm}^2$

Površina najvećeg trokuta 3 072 cm^2, a najmanjeg 3 cm^2. 1 BOD

…………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA