ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

8. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom mora također biti prirodan. 1 BOD

Vrijedi:

$$\frac{a+64}{a-64}=1+\frac{128}{a-64}.$$ 2 BODA

Broj a – 64 mora biti djelitelj broja 128. Negativne djelitelje ne treba ni promatrati, jer će za njih promatrani broj biti ili negativan ili jednak 0, pa korijeni ili ne postoje ili su jednaki 0 što nije prirodan broj. 2 BODA

Pogledajmo tablicu:

$a-64$	1	2	4	8	16	32	64	128
a	65	66	68	72	80	96	128	192
$\frac{128}{a-64}$	128	64	32	16	8	4	2	1
$1+\frac{128}{a-64}$	129	65	33	17	**9**	5	3	2

3 BODA

Dakle, 9 je jedini kvadrat broja,

tj. postoji samo jedan broj a = 80 za koji je $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ također prirodan broj. 2 BODA

…………………………………………………………………….……..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je korijen prirodan broj, broj pod korijenom također mora biti prirodan. 1 BOD

Označimo $x = \frac{a+64}{a-64}$ i iz toga izrazimo a.

$ax - 64x = a + 64$

$ax - a = 64x + 64$

$a \cdot (x - 1) = 64x + 64$

$a = \frac{64x+64}{x-1}$ 1 BOD

$a = \frac{64x-64+128}{x-1}$

$a = 64 + \frac{128}{x-1}$ 1 BOD

Broj x – 1 mora biti djelitelj broja 128. Budući da su brojevi x i a prirodni brojevi, promatramo samo djelitelje broja 128 koji su također prirodni brojevi. 2 BODA

Djelitelji broja 128 su 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 i 128. 2 BODA

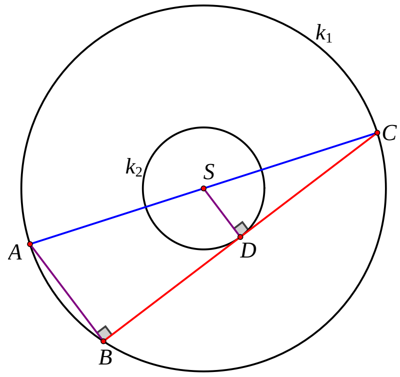
Ako x – 1 poprima te vrijednosti, onda je x (redom) 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65 i 129. 1 BOD

Među njima je jedino korijen broja 9 prirodan broj. 1 BOD

Onda je $a = 64 + \frac{128}{8} = 80$ jedini broj s traženim svojstvom. 1 BOD

…………………………………………………………………….……... UKUPNO 10 BODOVA

2.



Skica: 1 BOD

S je središte kružnica, a točka D diralište tangente $\overline{BC}$ i kružnice k_2.

Duljine polumjera kružnica k_1 i k_2 označimo redom sa r_1 i r_2. Iz uvjeta zadatka slijedi omjer $r_1 : r_2 = 3 : 1$, odnosno $r_1 = 3r_2$. 1 BOD

Prema Talesovom poučku obodni kut $\angle ABC$ nad promjerom $\overline{AC}$ je pravi kut.

Prema tome, trokut ΔABC je pravokutan. 1 BOD

Tetiva $\overline{BC}$ kružnice k_1 je i tangenta kružnice k_2, te je okomita na polumjer $\overline{SD}$.

Prema tome, i ΔSDC je pravokutan. 1 BOD

Trokuti ΔABC i ΔSDC su slični po poučku KK (trokuti imaju jedan zajednički kut pri vrhu C i oba imaju jedan pravi kut). 1 BOD

Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔSDC slijedi proporcionalnost duljina njihovih stranica:

$$\frac{|AB|}{|SD|} = \frac{|AC|}{|SC|} \Rightarrow \frac{12}{r_2} = \frac{6r_2}{3r_2} \Rightarrow r_2 = 6\text{ cm},$$ 2 BODA

a $r_1 = 18$ cm. 1 BOD

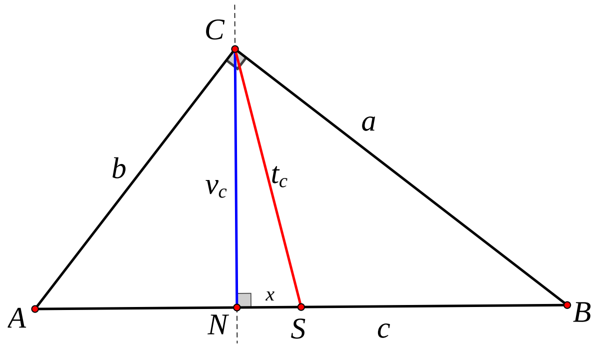
Površina kružnog vijenca računa se po formuli $P = \left(r_1^2 - r_2^2\right)\pi$, gdje su r_1 i r_2 duljine polumjera kružnica k_1 i k_2. 1 BOD

Prema tome, površina kružnog vijenca je $P = (324 - 36)\,\pi$ cm^2 = $288\,\pi$ cm^2. 1 BOD

…………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Površina kružnog vijenca može se dobiti tako da se posebno izračunaju površine krugova omeđenih kružnicama k_1 i k_2, a zatim se te vrijednosti oduzmu.

3.



Skica: 1 BOD

(Napomena: Ako na skici nisu nacrtane dužine visina v_c i težišnica t_c, **ne bodovati** 1 BODOM.)

Prema uvjetu zadatka je $v_c : t_c = 12:13$ pa postoji realan broj *k* takav da je $v_c = 12k$ i $t_c = 13k$.

Označimo sa *N* nožište visine nacrtane vrhom *C*, a sa *S* polovište hipotenuze *c*.

Kako je trokut *ABC* pravokutan, točka *S* je središte opisane kružnice trokuta, 1 BOD

pa je $\frac{c}{2} = t_c = 13k$. 1 BOD

Označimo $|NS| = x$. U pravokutnom trokutu *NSC* vrijedi $x^2 = t_c^2 - v_c^2 = 169k^2 - 144k^2 = 25k^2$.

Zato je $x = 5k$. 2 BODA

Slijedi da je $|AN| = \frac{c}{2} - x = 13k - 5k = 8k$. 1 BOD

Dalje možemo na dva načina.

Prvi način:

Uz oznake $|\angle CAB| = \alpha$ i $|\angle ABC| = \beta$ je $\alpha + \beta = 90°$. Budući da su trokuti *ANC* i *CNB* pravokutni, slijedi da je $|\angle NCA| = \beta$ i $|\angle BCN| = \alpha$. 1 BOD

Zato su trokuti *ANC* i *CNB* slični po poučku KK, pa vrijedi 1 BOD

$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{\frac{c}{2} - x} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2$. 2 BODA

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Trokuti *ABC* i *ACN* imaju jedan zajednički kut ($\angle BAC$, odnosno $\angle NAC$) i oba imaju jedan pravi kut, pa su slični po poučku KK. 2 BODA

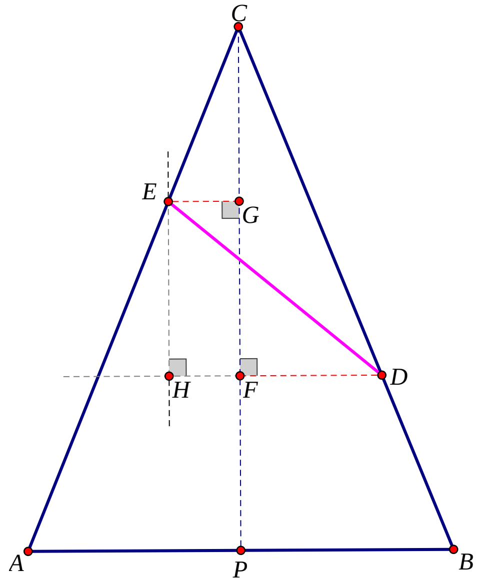
Tada vrijedi:

$\frac{a}{b} = \frac{v_c}{|AN|} = \frac{12k}{8k} = \frac{3}{2} = 3:2.$ 2 BODA

…………………………………………………………………….…….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je *P* polovište osnovice $\overline{AB}$. Budući da je trokut *ABC* jednakokračan, to je $\overline{CP}$ je okomita na $\overline{AB}$. Točkama *D* i *E* nacrtajmo okomice na $\overline{CP}$ i nožišta tih okomica označimo redom kao točke *F* i *G*. Produljimo dužinu $\overline{FD}$ preko točke *F* i na tom pravcu označimo točku *H* takvu da je *HFGE* pravokutnik. Tada je ΔHDE pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{DE}$.



Skica: 1 BOD

(**Napomena:** Ako na skici nisu nacrtani polupravac $\overrightarrow{DF}$ (produžetak dužine $\overline{DF}$) i okomica točkom *E* na dužinu $\overline{DF}$, **ne bodovati** 1 BODOM.)

Iz uvjeta koje zadovoljavaju točke *E* i *D*, $|CE|:|EA|=1:2$ i $|BD|:|DC|=1:2$, slijedi $|CE|:|CA|=1:3$ i $|DC|:|BC|=2:3$ (tj. $|CE|=\frac{13}{3}\,\text{cm}$ i $|DC|=\frac{26}{3}\,\text{cm}$) te $|AP|=5\,\text{cm}$.

Iz pravokutnog trokuta *APC* slijedi da je $|PC|=\sqrt{|AC|^2-|AP|^2}=12\,\text{cm}$. 1 BOD

Trokuti *EGC* i *APC* su slični (po poučku KK), 1 BOD

pa je $|EG|:|AP|=|CE|:|CA|=1:3$, odnosno $|EG|=\frac{|AP|}{3}=\frac{5}{3}\,\text{cm}$ 1 BOD

i $|GC|:|PC|=1:3$, odnosno $|GC|=\frac{|PC|}{3}=4\,\text{cm}$. 1 BOD

Trokuti *DFC* i *PBC* su slični (po poučku KK), 1 BOD

pa je $|FD|:|PB|=|DC|:|BC|=2:3$, odnosno $|FD|=\frac{2|PB|}{3}=\frac{10}{3}\,\text{cm}$ 1 BOD

i $|FC|:|PC|=2:3$, odnosno $|FC|=\frac{2|PC|}{3}=8\,\text{cm}$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut *EHD* dobivamo

$|DE|=\sqrt{|HD|^2+|EH|^2}=$

$=\sqrt{(|HF|+|FD|)^2+|FG|^2}=$

$=\sqrt{(|EG|+|FD|)^2+(|FC|-|GC|)^2}=$ 1 BOD

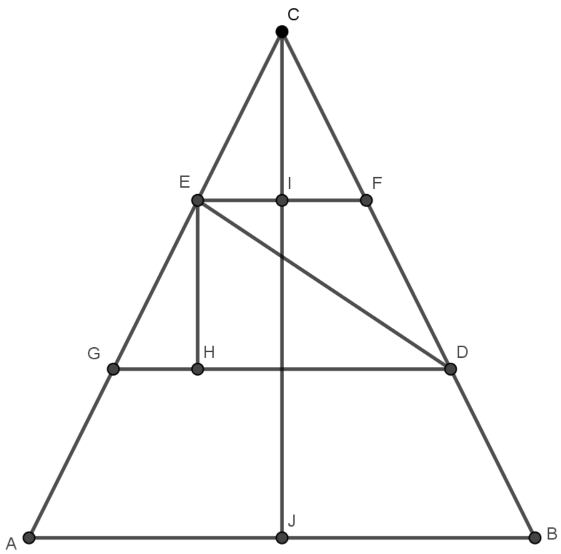
$=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}\,\text{cm}$ 1 BOD

…………………………………………………………………………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Nadopunimo sliku na sljedeći način:

Iz točaka D i E povuku se usporednice s osnovicom trokuta AB (dobiju se točke F i G), a zatim se povuku okomice iz točaka C i E (te se označe točke H, I i J). 1 BOD



Prema Talesovom poučku, usporedni pravci na krakovima odsijecaju proporcionalne dužine.

Zbog $|BC|=|AC|$ je $|AG|=|BD|=\frac{1}{3}|AC|$ i $|CE|=\frac{1}{3}|AC|$, te je i $|GE|=\frac{1}{3}|AC|$. 1 BOD

Točka J je polovište jednakokračnog trokuta ABC, pa je $|AJ|$ = 5 cm. Iz pravokutnog trokuta AJC slijedi da je $|CJ|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, odnosno $|CJ|$ = 12 cm. 1 BOD

Trokuti CEI i CAJ su slični (po poučku KK) pa je, zbog $|CE|:|CA| = 1 : 3$,

$|CE|=\frac{13}{3}$ cm, $|EI|=\frac{5}{3}$ cm i $|CI|$ = 4 cm. 2 BODA

Po istom poučku slični su trokuti GDC i ABC.

Zbog $|CD|:|CB| = 2 : 3$ je $|GD|=\frac{2}{3}\cdot|AB|=\frac{20}{3}$ cm. 1 BOD

Trokuti CEI i EGH su sukladni (KSK poučak) pa je $|GH|=\frac{5}{3}$ cm i $|EH|$ = 4 cm. 1 BOD

Tada je $|HD|=|GD|-|GH|=\frac{20}{3}-\frac{5}{3}=\frac{15}{3}$ = 5 cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta EHD slijedi:

$|ED|^2=|EH|^2+|HD|^2 = 4^2 + 5^2 = 41$. 1 BOD

Dakle, $|ED|=\sqrt{41}$ cm. 1 BOD

…………………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo broj točaka na drugom pravcu s x.

Na prvom je pravcu 8 točaka, koje čine $\frac{8\cdot 7}{2}=$ 28 dužina. 1 BOD

Svaka od tih dužina sa svakom od x točaka na drugom pravcu čini jedan trokut.
Takvih je trokuta $28x$. 1 BOD

Ako je na drugom pravcu x točaka, one određuju $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$ dužina. 1 BOD

Svaka dužina sa svakom od 8 točaka na prvom pravcu također čine trokut.
Takvih je trokuta $4x^2 - 4x$. 1 BOD
Ukupan broj trokuta je 640. Vrijedi:
$28x + 4x^2 - 4x = 640$ 1 BOD
$4x^2 + 24x - 640 = 0 \quad / : 4$
$x^2 + 6x - 160 = 0$ 1 BOD
Dobivena kvadratna jednadžba riješi se rastavljanjem srednjeg člana i izlučivanjem (**prvi način**):
$x^2 + 16x - 10x - 160 = 0$
$x \cdot (x + 16) - 10 \cdot (x + 16) = 0$
$(x + 16) \cdot (x - 10) = 0$ 2 BODA
Iz $x + 16 = 0$ slijedi $x_1 = -16$, a iz $x - 10 = 0$ slijedi $x_2 = 10$. 1 BOD
Budući da broj točaka mora biti prirodni broj, na drugom je pravcu 10 točaka. 1 BOD
…………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Jednadžba $x^2 + 6x - 160 = 0$ se može riješiti i na sljedeća dva načina:

Drugi način:
$x^2 + 6x - 160 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 - 160 = 0$
$(x + 3)^2 = 169$ 1 BOD
$x + 3 = \sqrt{169}$
$x_1 + 3 = 13 \qquad x_2 + 3 = -13$
$x_1 = 10 \qquad x_2 = -16$ 2 BODA
Broj točaka mora biti prirodan broj, dakle na drugom je pravcu 10 točaka. 1 BOD

Treći način:
Iz $x^2 + 6x = 160$ slijedi $x(x + 6) = 160$.
Kako je x prirodan broj, zaključujemo da x mora biti djelitelj broja $160 = 2^5 \cdot 5$. 1 BOD
Za svaku mogućnost da je x djelitelj broja 160 provjerimo je li $x(x + 6) = 160$ 2 BODA
i ustanovimo da je jedino rješenje $x = 10$. 1 BOD

Napomena 2: Ukoliko učenik na prvom pravcu pogrešno prebroji 56, a na drugom $x \cdot (x-1)$ dužina, zadatak treba bodovati s 0 BODOVA.

Ukoliko učenik točno prebroji 28 dužina na prvom pravcu, a na drugom pravcu prebroji $x \cdot (x-1)$ dužina (umjesto $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$) ili ukoliko učenik točno prebroji $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$ dužina na drugom pravcu, a na prvom 56 (umjesto 28), onda treba bodovati dio rješenja do dobivanja kvadratne jednadžbe (koja onda nema cjelobrojna rješenja), slijedeći tu pogrešku i učenik, u tom slučaju, na zadatku najviše može dobiti 5 BODOVA.