ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
28. veljače 2018.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

**1.** Neka je $x$ iznos novca prije plaćanja poreza.

Oporezuje se $\frac{2}{5}x+\frac{1}{3}x=\frac{11}{15}x$, 2 BODA

a ne oporezuje $\frac{4}{15}x$. 1 BOD

Iz $\frac{4}{15}x=100\ 000$ dobiva se $x$ = 375 000. Tvrtka je imala 375 000 kuna. 2 BODA

Od toga se po stopi 20 % oporezuje $\frac{2}{5}\cdot 375\ 000=150\ 000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je 150 000 · 0.2 = 30 000 kn. 1 BOD

Zatim se po stopi 10 % oporezuje $\frac{1}{3}\cdot 375\ 000=125\ 000$ kn. 1 BOD

Iznos poreza je 125 000 · 0.1 = 12 500 kn. 1 BOD

Za porez je ukupno plaćeno 30 000 + 12 500 = 42 500 kuna. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**2.** **Prvi način:** Neka je $\alpha$ veličina unutarnjeg, a $\alpha_1$ veličina susjednog vanjskog kuta zadanog pravilnog mnogokuta.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $\alpha = 9\,\alpha_1$ i $\alpha + \alpha_1 = 180°$.

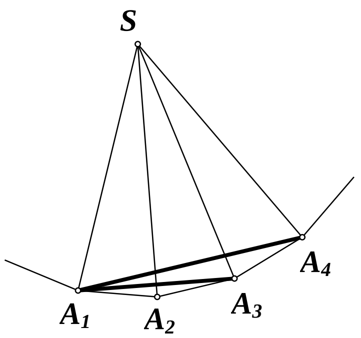
Slijedi da je $10\alpha_1 = 180°$, pa je $\alpha_1 = 18°$. 1 BOD

Tada je $\alpha = 180° - 18° = 162°$. 1 BOD

U pravilnom mnogokutu svi su vanjski kutovi jednakih veličina, a zbroj im je 360°.

Iz $18° \cdot n = 360°$ izračuna se da je $n = 20$, dakle riječ je o dvadeseterokutu. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s traženim kutom izgleda ovako: 1 BOD




Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2| = 360° : 20 = 18°$, pa je $|\angle A_1SA_3| = 2 \cdot 18° = 36°$ i

$|\angle A_1SA_4| = 3 \cdot 18° = 54°$. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_3S$ se izračuna

$|\angle A_3A_1S| = (180° - 36°) : 2 = 144° : 2 = 72°$. 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_4S$ se izračuna

$|\angle A_4A_1S|$ = (180° – 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°. 1 BOD

Nadalje, $|\angle A_3A_1A_4| = |\angle A_3A_1S| - |\angle A_4A_1S|$, pa je 1 BOD

$|\angle A_3A_1A_4|$ = 72° – 63° = 9°. 1 BOD

…………………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Prvi dio identičan je postupku u prvom načinu uključujući i skicu (ukupno 4 BODA).
Dalje slijedi:

Vrijedi da je $|\angle A_1SA_2|$ = 360° : 20 = 18°, pa je $|\angle A_1SA_4|$ = 3 · 18° = 54°. 2 BODA

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_2A_3$ vrijedi da je

$|\angle A_3A_1A_2|$ = (180° – $\alpha$) : 2 = (180° – 162°) : 2 = 18° : 2 = 9°. 1 BOD

Iz jednakokračnog trokuta $A_1A_4S$ se izračuna

$|\angle A_4A_1S|$ = (180° – 54°) : 2 = 126° : 2 = 63°. 1 BOD

Nadalje, $|\angle A_3A_1A_4| = \frac{\alpha}{2} - \left(|\angle A_2A_1A_3| + |\angle A_4A_1S|\right)$, pa je 1 BOD

$|\angle A_3A_1A_4|$ = 81° – (9° + 63°) = 81° – 72° = 9°. 1 BOD

…………………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

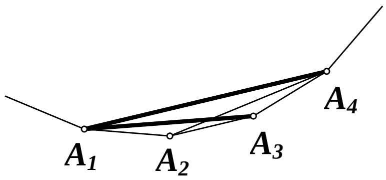
**Treći način:** Ako je $\alpha$ veličina unutarnjeg kuta mnogokuta, onda je veličina njegovog vanjskog kuta 180° – $\alpha$.

Iz uvjeta zadatka 9 · (180° – $\alpha$) = $\alpha$, izračuna se $\alpha$ = 162°. 2 BODA

Koristeći formulu za veličinu unutarnjeg kuta $n$-terokuta

$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 162°$ izračuna se da je $n$ = 20. 1 BOD

Skica dijela dvadeseterokuta s prikazom traženog kuta izgleda ovako: 1 BOD




Duljine stranica i veličine kutova pravilnog mnogokuta su jednake,
pa prema SKS poučku vrijedi: $\Delta A_1A_2A_3 \cong \Delta A_2A_3A_4$.

Tada je $|A_1A_3| = |A_2A_4|$. 1 BOD

Onda je, prema SSS poučku: $\Delta A_1A_3A_4 \cong \Delta A_4A_2A_1$.

Zbog toga vrijedi $|\angle A_3A_4A_1| = |\angle A_2A_1A_4|$. 1 BOD

Zbroj veličina kutova svakog četverokuta je 360°, a u četverokutu $A_1A_2A_3A_4$ dva kuta imaju po 162°, dok su druga dva jednakih veličina.

Onda je: $|\angle A_2A_1A_4|$ = (360° – 2 · 162°) : 2 = 18°. 2 BODA

U jednakokračnom trokutu $A_1A_2A_3$ je: $|\angle A_2A_1A_3|$ = (180° – 162°) : 2 = 9°. 1 BOD

Konačno je: $|\angle A_3A_1A_4| = |\angle A_2A_1A_4| - |A_2A_1A_3|$ = 18° – 9° = 9°. 1 BOD

…………………………………………………………….…………..………....… UKUPNO 10 BODOVA

**3. Prvi način:** Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka $b$ može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 9, tj. $6 + 3a + 3b = 9k$, $k \in N$. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka $a$ može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka djeljiv je brojem 3, tj. $3a + 2b = 3l$, $l \in N$. 1 BOD

Kako su pribrojnik $3a$ i zbroj $3l$ djeljivi brojem 3, onda i drugi pribrojnik $2b$ mora biti djeljiv brojem 3. To vrijedi za $b = 0, 3, 6$, i 9. 1 BOD

Kako je znamenka $b$ već uvjetovana djeljivošću brojem 2, znamenka $b$ može biti 0 ili 6. 1 BOD

Uvrštavanjem broja $b$ u izraz $6 + 3a + 3b = 9k$ slijedi:

a) $b = 0$

$6 + 3a = 9k$

Za $k = 1$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 2$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 3$ slijedi $a = 7$.

b) $b = 6$

$24 + 3a = 9k$

Za $k = 3$ slijedi $a = 1$.

Za $k = 4$ slijedi $a = 4$.

Za $k = 5$ slijedi $a = 7$.

U oba slučaja, zbog uvjeta djeljivosti brojem 2, znamenka $a$ može biti samo 4. 2 BODA

Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA

………………………………………………………..…………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka $b$ može biti 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka $6 + 3a + 3b$ mora biti djeljiv brojem 9. 1 BOD

Najveća vrijednost za $a$ i $b$ je 9, pa $6 + 3a + 3b$ može imati najveću vrijednost 60.

Zbroj $6 + 3a + 3b$ može imati vrijednost: 9, 18, 27, 36, 45 i 54.

Dijeljenjem brojem 3 dobije se da je $2 + a + b = 3, 6, 9, 12, 15$ ili 18, odnosno $a + b = 1, 4, 7, 10, 13$ ili 16. 1 BOD

Broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka $a$ može biti 2, 4, 6 ili 8.

(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast) 1 BOD

Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka koji je $3a + 2b$ mora biti djeljiv brojem 3. 1 BOD

Vidjeli smo da $a$ može imati vrijednost 2, 4, 6 ili 8, dok $b$ može biti 0, 2, 4, 6, ili 8.

Budući je zbroj dva parna broja opet parni broj, vrijednost zbroja $a + b$ može biti 4, 10 ili 16. Sve moguće kombinacije prikazane su u tablici (uključujući i vrijednost izraza $3a + 2b$): 2 BODA

| $a$ | $b$ | $a + b$ | $3a + 2b$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 4 | 10 |
| 2 | 8 | 10 | 22 |
| 4 | 0 | 4 | 12 |
| 4 | 6 | 10 | 24 |
| 6 | 4 | 10 | 26 |
| 8 | 2 | 10 | 28 |
| 8 | 8 | 16 | 40 |

Od svih brojeva u zadnjem stupcu, brojem 3 su djeljivi samo 12 i 24. 1 BOD
Njih dobijemo za $a = 4$ i $b = 0$, odnosno $a = 4$ i $b = 6$.
Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA
…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:** Peteroznamenkasti broj $\overline{ababa}$ je prema uvjetu zadatka djeljiv brojem 6, pa je stoga djeljiv brojevima 2 i 3.
Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 2, znamenka $a$ može biti 2, 4, 6 ili 8.
(0 ne može biti jer broj $\overline{ababa}$ ne bi bio peteroznamenkast). 1 BOD
Imamo brojeve oblika $\overline{2b2b2}$, $\overline{4b4b4}$, $\overline{6b6b6}$ i $\overline{8b8b8}$.
Zbog djeljivosti broja $\overline{ababa}$ brojem 3, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 3.
Imamo sljedeće mogućnosti:

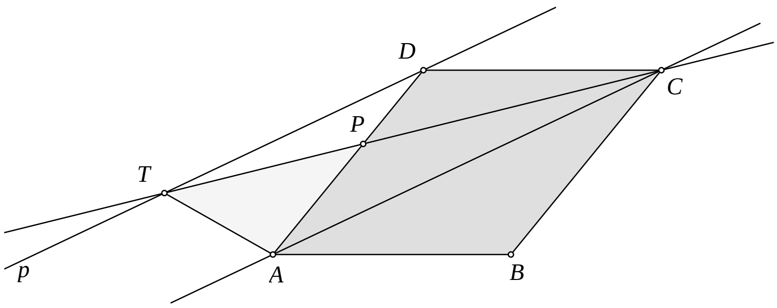
| $a$ | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | 0, 3, 6, 9 | 0, 3, 6, 9 | 0, 3, 6, 9 | 0, 3, 6, 9 |

2 BODA

Ako je broj $\overline{6ababab}$ višekratnik broja 18, onda je on djeljiv brojevima 2 i 9.
Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 2, znamenka $b$ može biti 0, 2, 4, 6 ili 8,
pa od u tablici navedenih mogućnosti za $b$ ostaju $b = 0$ ili $b = 6$. 2 BODA

Zbog djeljivosti broja $\overline{6ababab}$ brojem 9, zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv brojem 9. Ispitujemo mogućnosti:
Za $a = 2$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 202 020 i 6 262 626 koji nisu djeljivi brojem 9.
Za $a = 4$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 404 040 i 6 464 646 koji jesu djeljivi brojem 9.
Za $a = 6$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 606 060 i 6 666666 koji nisu djeljivi brojem 9.
Za $a = 8$ i $b = 0$ ili 6 dobije se 6 808 080 i 6 868 686 koji nisu djeljivi brojem 9. 3 BODA
Traženi brojevi su 6 404 040 i 6 464 646. 2 BODA
…………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**4. Prvi način:**




skica: 1 BOD

$p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACT}$ jer ta dva trokuta imaju zajedničku stranicu $\overline{AC}$ i jednake duljine visina na tu stranicu. 1 BOD
Kako je $p_{\Delta ACD} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta PCD}$ i $p_{\Delta ACT} = p_{\Delta ACP} + p_{\Delta APT}$
slijedi da je $p_{\Delta APT} = p_{\Delta PCD}$. 2 BODA
Vrijedi $|DP| = \frac{2}{5}|DA|$, a duljina visine na stranicu $\overline{DP}$ u trokutu $PCD$ jednaka je duljini

visine na stranicu $\overline{DA}$ u trokutu $ACD$.

Zbog toga je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$. 2 BODA

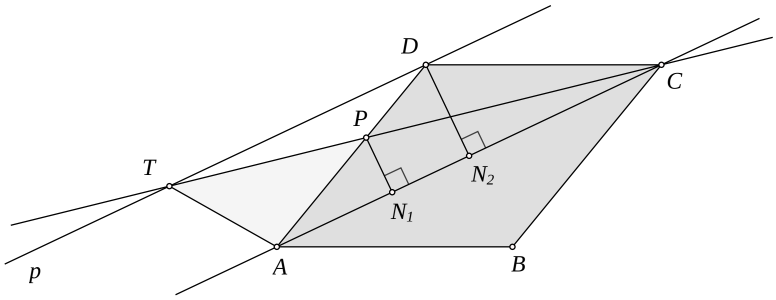
S obzirom da dijagonala dijeli romb na dva sukladna trokuta, $p_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$,

pa je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} p_{ABCD} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$, što znači da je i $p_{\Delta APT} = \frac{1}{5} p_{ABCD}$ 3 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1:5$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

(**Napomena:** Dokazati da je $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$ može se i ovako:



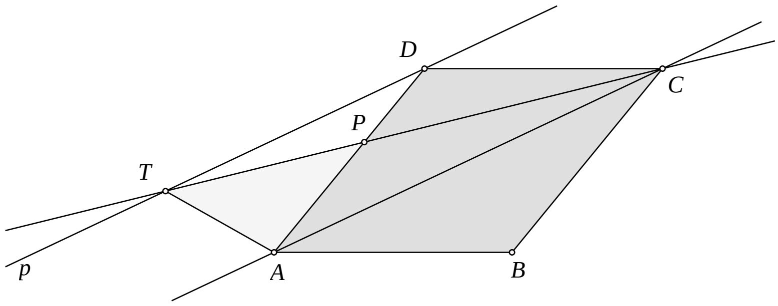

Označimo s $N_1$ i $N_2$ nožišta visina iz vrhova $P$ i $D$ u trokutima $\Delta ACP$ i $\Delta ACD$.
Trokut $\Delta AN_1P$ sličan je trokutu $\Delta AN_2D$ po KK-poučku (zajednički kut kod vrha $A$ i jedan pravi kut).

Kako je $|AP| = \frac{3}{5}|AD|$, zbog sličnosti trokuta će biti $|N_1P| = \frac{3}{5}|N_2D|$,

pa je i površina $p_{\Delta ACP} = \frac{3}{5} p_{\Delta ACD}$ (imaju zajedničku stranicu).

Dakle, $p_{\Delta PCD} = \frac{2}{5} p_{\Delta ACD}$. 2 BODA)

**Drugi način:**




1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu $PDT$

jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu $APT$.

Zbog toga je $p_{\Delta PDT} = \frac{2}{3} p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Trokuti *ACP* i *DPT* su slični jer su im kutovi iste veličine (dva vršna kuta, odnosno šiljasti kutovi uz presječnicu). 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi je $p_{\Delta ACP} : p_{\Delta DPT} = 9 : 4$, odnosno $p_{\Delta ACP} = \frac{9}{4} p_{\Delta DPT}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta ACP} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} p_{\Delta APT} = \frac{3}{2} p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Zbog $|AP| : |PD| = 3 : 2$ vrijedi $|PD| = \frac{2}{3}|AP|$, a duljina visine na stranicu $\overline{PD}$ u trokutu *PDC* jednaka je duljini visine na stranicu $\overline{AP}$ u trokutu *APC*.

Zbog toga je $p_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} p_{\Delta APC}$. 1 BOD

Tada je $p_{\Delta PDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} p_{\Delta APT} = p_{\Delta APT}$. 1 BOD

Dijagonala $\overline{AC}$ dijeli romb na dva jednaka dijela, pa je površina romba

$p_{ABCD} = 2\left(p_{\Delta APC} + p_{\Delta PCD}\right) = 2\left(\frac{3}{2} p_{\Delta PDC} + p_{\Delta PDC}\right) = 5p_{\Delta PDC} = 5p_{\Delta APT}$. 2 BODA

Dakle, $p_{\Delta APT} : p_{ABCD} = 1:5$. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**5. Prvi način:** Uvedimo oznake Aninih i Ivanovih godina kao u tablici. 1 BOD

| | Ana | Ivan |
|---|---|---|
| Prije | $y$ | $x$ |
| Sada | $1.2x$ | $y$ |
| Poslije | $150 - 1.2x$ | $1.2x$ |

Razlika godina između sada i prije jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:

$1.2x - y = y - x$, 1 BOD

iz čega je $y = 1.1x$ 1 BOD

Razlika godina između poslije i sada jednaka je kod Ane i kod Ivana pa vrijedi:

$150 - 1.2x - 1.2x = 1.2x - y$ 1 BOD

$y = 3.6x - 150$ 1 BOD

Zato je:

$3.6x - 150 = 1.1x$, 1 BOD

iz čega je $x = 60$ 1 BOD

Onda je $1.2x = 1.2 \cdot 60 = 72$ 1 BOD

$y = 1.1 \cdot 60 = 66$ 1 BOD

Ana ima 72, a Ivan 66 godina. 1 BOD

……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Drugi način:** Iz teksta se može zaključiti da je Ana starija od Ivana.

Neka Ivan sada ima $x$ godina, a Ana $x + y$ godina (Ana je starija za $y$ godina).

Ana je imala godina kao Ivan sada ($x$) prije $y$ godina. Ivan je tada imao $x - y$ godina. 1 BOD

Prvi uvjet zadatka daje jednadžbu:

$1.2 \cdot (x - y) = x + y$, 1 BOD

iz čega se sređivanjem dobije:

$x = 11y$ 1 BOD
Ako Ivan sada ima $x$ godina, a Ana $x + y$ godina, Ivan će za $y$ godina imati godina kao Ana sada.
Ivan će tada imati $x + y$ godina, a Ana će imati $x + 2y$ godina. 1 BOD
Iz drugog uvjeta zadatka slijedi:
$x + y + x + 2y = 150$ tj.
$2x + 3y = 150$ 1 BOD
Uvrštavanjem $x = 11y$ dobije se:
$22y + 3y = 150$, 1 BOD
pa je $y = 6$. 1 BOD
Tada je $x = 11 \cdot 6 = 66$, 1 BOD
a $x + y = 66 + 6 = 72$. 1 BOD
Ivan ima 66 godina, a Ana 72 godine. 1 BOD
……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

**Treći način:** Označimo s $A$ Anine, a s $I$ Ivanove trenutne godine.
Neka je Ana je imala godina koliko Ivan sada prije $x$ godina.
Vrijedi $A - x = I$, tj. $x = A - I$. 1 BOD
Ivan je tada imao $I - x$ godina, pa vrijedi $A = 1.2 \cdot (I - x)$ 1 BOD
Uvrštavanjem nepoznanice $x$ iz prve u drugu jednadžbu dobije se:
$A = 1.2 \cdot (I - A + I)$,
iz čega je $11A = 12I$ 1 BOD
Za $y$ godina Ivan će imati godina koliko Ana sada.
Vrijedi $I + y = A$, tj. $y = A - I$. 1 BOD
Ana će tada imati $A + y$ godina, a zajedno će imati 150 godina.
Vrijedi: $I + y + A + y = 150$, tj. $I + A + 2y = 150$ 1 BOD
Uvrštavanjem nepoznanice $y$ u drugu jednadžbu dobije se:
$I + A + 2A - 2I = 150$
$3A - I = 150$ 1 BOD
Rješavanjem sustava jednadžbi
$11A = 12I$ i $3A - I = 150$ dobije se:
$I = 3A - 150$
$11A = 36A - 1800$ 1 BOD
$25A = 1800$
$A = 72$ 1 BOD
Onda je: $I = 3 \cdot 72 - 150 = 66$ 1 BOD
Ana ima 72 godine, a Ivan 66 godina. 1 BOD
……………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA