

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
23. veljače 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Treba izračunati koliko je % poskupjela cijena materijala za izgradnju druge polovine zgrade sa 60 % udjela materijala uz poskupljenje 15%.

$$15\% \cdot 60\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{1000} = 4.5\% \quad 4 \text{ BODA}$$

Na sličan izračunavamo koliko je posto poskupjela cijena rada izgradnje druge polovine zgrade sa 40% udjela uz poskupljenje 8 %.

$$8\% \cdot 40\% \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{1000} = 1.6\% \quad 4 \text{ BODA}$$

$$4.5\% + 1.6\% = 6.1\% \quad 1 \text{ BOD}$$

Izgradnja stambene zgrade poskupjela je u odnosu na početnu cijenu za 6.1%. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Nakon povećanja od 15 %, trošak će biti  $1.15 \cdot 0.3 = 0.345 = 34.5\%$  što je povećanje troškova za 4.5 %.

4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje.

Nakon povećanja od 8 %, trošak će biti  $1.08 \cdot 0.2 = 0.216 = 21.6\%$  što je povećanje troškova za 1.6 %.

4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je  $4.5\% + 1.6\% = 6.1\%$ . 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Troškovi materijala za izradu druge polovine zgrade čine 0.5 od 60 % = 30 % ukupnog troška izgradnje. Povećanjem cijene troškova materijala za 15 %, trošak će se povećati za

$0.15 \cdot 0.3 = 0.045 = 4.5\%$ . 4 BODA

Troškovi cijene rada druge polovine zgrade čine 0.5 od 40 % = 20 % ukupnog troška izgradnje.

Povećanjem cijene rada za 8 %, trošak će se povećati za  $0.08 \cdot 0.2 = 0.016 = 1.6\%$ . 4 BODA

Ukupno povećanje troškova u odnosu na početnu cijenu je  $4.5\% + 1.6\% = 6.1\%$ . 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Petorke znamenaka koje zadovoljavaju uvjet da je zbroj znamenaka traženih peteroznamenkastih

brojeva 42 su: {9, 9, 9, 9, 6}, {9, 9, 9, 8, 7} i {9, 9, 8, 8, 8}. 3 BODA

Koristeći znamenke prve petorke moguće je odrediti 5 brojeva, ali 69 999 ne zadovoljava uvjet da peteroznamenasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 996, 99 969, 99 699, 96 999 2 BODA

Koristeći znamenke druge petorke moguće je odrediti  $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) = 20$  brojeva, ali 87 999, 79 998, 79 989, 79 899, 78 999 ne zadovoljavaju uvjet da peteroznamenasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 987, 99 978, 99 897, 99 879, 99 798, 99 789, 98 997, 98 979, 98 799, 97 998, 97 989, 97 899, 89 997, 89 979, 89 799. 2 BODA

Koristeći znamenke treće petorke moguće je odrediti  $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) : (3 \cdot 2) : 2 = 10$  brojeva i svi zadovoljavaju uvjet da peteroznamenasti broj mora biti veći od 88 888.

Traženi brojevi su: 99 888, 98 988, 98 898, 98 889, 89 988, 89 898, 89 889, 88 998, 88 989, 88 899. 2 BODA

Traženih brojeva ima ukupno  $4 + 15 + 10 = 29$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Navedeni svi peteroznamenasti brojevi, koji su rješenje zadatka, i odgovor bez obrazloženja boduju se s 10 bodova. Za rješenja koja su ponovljena ili pogrešna oduzimaju se bodovi, pri čemu se za svaka dva ponovljena / pogrešna rješenja oduzima po 1 bod i to do najviše 0 bodova.

3. Prvi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

Kako je  $2415 : 3 = 805$ , Ante će dobiti  $2 \cdot 805 = 1610$  kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Budući da je  $2415 : 5 = 483$ , Ante dobiva  $2 \cdot 483 = 966$  kn, a Branko  $3 \cdot 483 = 1449$  kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  odnosno  $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$ . Ukupan broj događaja bacanja dviju

kocaka je  $6 \cdot 6 = 36$ . Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ . Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je  $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666\dots \approx 16.67\%$ . 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

Drugi način:

Ako kocke pokažu jednake brojeve, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 1.

U tom slučaju Ante će dobiti  $2k$  kn, a Branko  $k$  kn, pri čemu je  $k$  racionalan broj.

Vrijedi da je  $2k + k = 2415$ ,  $3k = 2415$ ,  $k = 805$ .

Ante će dobiti  $2 \cdot 805 = 1610$  kn, a Branko 805 kn. 2 BODA

Ako brojevi na kockama budu različiti, Ante i Branko dijele novac u omjeru 2 : 3.

Tada će Ante dobiti  $2l$  kn, a Branko  $3l$  kn, pri čemu je  $l$  racionalan broj.

Budući da je  $2l + 3l = 2415$ ,  $5l = 2415$ ,  $l = 483$ .

Ante dobiva  $2 \cdot 483 = 966$  kn, a Branko  $3 \cdot 483 = 1449$  kn. 3 BODA

Oba događaja "*Ante će dobiti više od 1000 kn*" i "*Branko će dobiti manje od 1000 kn*" zbivaju se u slučaju kada kockice pokažu iste brojeve. Dakle, oba događaja imaju jednaku vjerojatnost. 1 BOD

Događaji bacanja dviju kocaka mogu se prikazati kao uređeni parovi brojeva iz skupa

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  odnosno  $\{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$ . Ukupan broj događaja bacanja dviju

kocaka je  $6 \cdot 6 = 36$ . Povoljni događaji mogu se prikazati kao skup uređenih parova

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ . Broj povoljnih događaja je 6. 2 BODA

Tražena vjerojatnost je  $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16666\dots \approx 16.67\%$ .

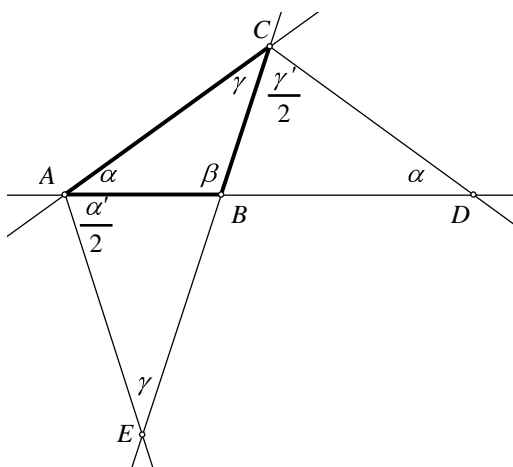
2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Rješenje prihvatiti u potpunosti neovisno o zapisu (razlomak, decimalni zapis, postotak).

4. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Neka je  $|\angle BAC| = \alpha$ ,  $|\angle CBA| = \beta$  i  $|\angle ACB| = \gamma$ . Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo  $\alpha'$  i  $\gamma'$ .

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha$$

$$\frac{\alpha'}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma$$

$$\frac{\gamma'}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

1 BOD

Trokut CAE je jednakokračan s osnovicom  $\overline{CE}$  pa vrijedi da je  $|\angle CEA| = |\angle ACB| = \gamma$ .

Budući da je  $|\angle EAB| = \frac{\alpha'}{2}$  i  $|\angle ACE| + |\angle EAC| + |\angle CEA| = 180^\circ$ , vrijedi jednačba

$$\gamma + \alpha + \frac{\alpha'}{2} + \gamma = 180^\circ$$

$$2\gamma + \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

2 BODA

$$2\gamma + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ / \cdot 2 \longrightarrow 4\gamma + \alpha = 180^\circ \longrightarrow \alpha = 180^\circ - 4\gamma$$

Trokut  $ADC$  je jednakokračan s osnovicom  $\overline{AD}$  pa vrijedi da je  $|\angle BAC| = |\angle CDA| = \alpha$ .

Budući da je  $|\angle BCD| = \frac{\gamma'}{2}$  i  $|\angle DAC| + |\angle ACD| + |\angle CDA| = 180^\circ$ , vrijedi jednačba

$$\alpha + \gamma + \frac{\gamma'}{2} + \alpha = 180^\circ$$

$$2\alpha + \gamma + 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

$$2\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ / \cdot 2 \longrightarrow 4\alpha + \gamma = 180^\circ$$

Dalje slijedi

$$4(180^\circ - 4\gamma) + \gamma = 180^\circ$$

$$720^\circ - 16\gamma + \gamma = 180^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

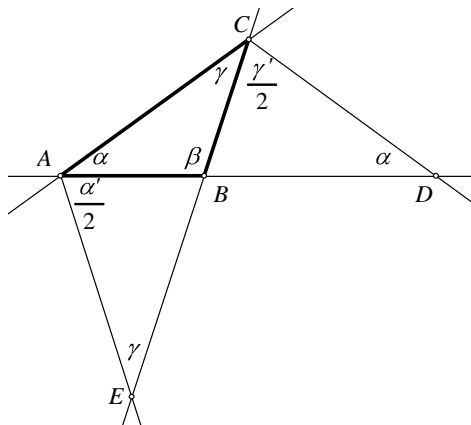
$$\gamma = 36^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 4 \cdot 36^\circ = 36^\circ, \beta = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Neka je  $|\angle BAC| = \alpha$ ,  $|\angle CBA| = \beta$  i  $|\angle ACB| = \gamma$ . Veličine odgovarajućih vanjskih kutova trokuta označimo  $\alpha'$  i  $\gamma'$ .

Tada je  $\alpha' = \beta + \gamma$  i  $\gamma' = \alpha + \beta$ . 1 BOD

Trokut  $CAE$  je jednakokračan s osnovicom  $\overline{CE}$  pa vrijedi da je  $|\angle CEA| = |\angle ACB| = \gamma$ . Za zbroj

veličina kutova u trokutu  $CAE$  vrijedi  $\gamma + \gamma + \left(\alpha + \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = 180^\circ$ , odnosno  $\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{5}{2}\gamma = 180^\circ$ .

2 BODA

Trokut  $ADC$  je jednakokračan s osnovicom  $\overline{AD}$  pa vrijedi da je  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CDA| = \alpha$ . Za zbroj

veličina kutova u trokutu  $ADC$  vrijedi  $\alpha + \alpha + \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 180^\circ$ , odnosno  $\frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \gamma = 180^\circ$ .

2 BODA

Zbrajanjem dobivenih izraza nalazimo da je  $\frac{7}{2}\alpha + \beta + \frac{7}{2}\gamma = 360^\circ$ , odakle, zbog činjenice da je

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , slijedi da je  $\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{2}\gamma = 180^\circ$ , odnosno da je  $\alpha + \gamma = 72^\circ$ .

1 BOD

Oduzimanjem dobivenih izraza nalazimo da je  $\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}\gamma = 0$ , odakle slijedi da je  $\alpha - \gamma = 0$ ,

odnosno da je  $\alpha = \gamma$ .

1 BOD

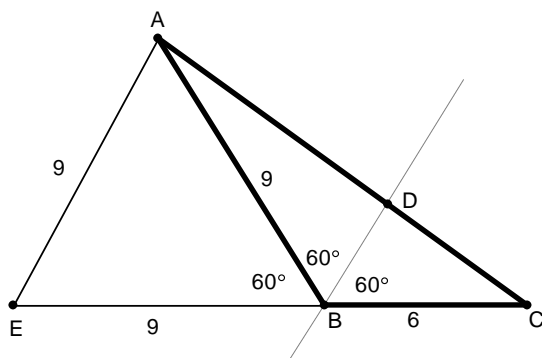
Iz  $\alpha + \gamma = 72^\circ$  i  $\alpha = \gamma$  zaključujemo da je  $\alpha = \gamma = 36^\circ$ , pa je  $\beta = 108^\circ$ .

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica  $\overline{BC}$  trokuta  $ABC$  preko točke  $B$ . Točkom  $A$  nacrta se pravac usporedan sa simetralom kuta  $\sphericalangle CBA$ . Sjecište tog pravca i pravca  $BC$  označimo s  $E$ .

1 BOD

Trokut  $AEB$  je jednakostraničan s duljinama stranica od 9 dm jer je  $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle CBD| = 60^\circ$

(kutovi s usporednim kracima) i  $|\sphericalangle ABE| = 60^\circ$  ( $\sphericalangle ABE$  i  $\sphericalangle CBA$  su sukuti,  $|\sphericalangle CBA| = 120^\circ$ )

pa je i veličina trećeg kuta  $|\sphericalangle BEA| = 60^\circ$ .

3 BODA

Trokut  $AEC$  sličan je trokutu  $DBC$  prema poučku o sličnosti trokuta K-K ( $\sphericalangle ACE$  zajednički kut oba trokuta,  $|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle CBD| = 60^\circ$ ) te vrijedi:

2 BODA

$$|BC| : |EC| = |BD| : |EA|$$

$$6 : (6 + 9) = |BD| : 9$$

$$15 \cdot |BD| = 54$$

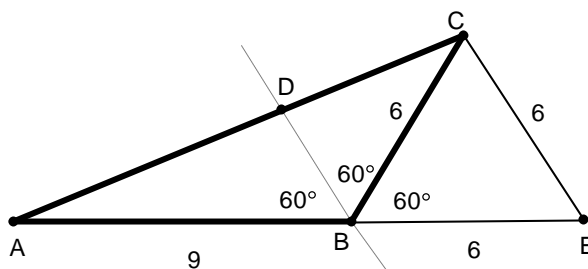
$$|BD| = 3.6 \text{ dm}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica:



1 BOD

Produlji se stranica  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  preko točke  $B$ . Točkom  $C$  nacrta se pravac usporedan sa simetralom kuta  $\sphericalangle CBA$ . Sjecište tog pravca i pravca  $AB$  označimo s  $E$ .

1 BOD

Trokut  $CBE$  je jednakostraničan s duljinama stranica od 6 dm jer je  $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle BCE| = 60^\circ$

(kutovi s usporednim kracima) i  $|\sphericalangle EBC| = 60^\circ$  ( $\sphericalangle EBC$  i  $\sphericalangle CBA$  su sukuti,  $|\sphericalangle CBA| = 120^\circ$ )

pa je i veličina trećeg kuta  $|\sphericalangle CEB| = 60^\circ$ .

3 BODA

Trokut  $AEC$  sličan je trokutu  $ABD$  prema poučku o sličnosti trokuta K-K ( $\sphericalangle BAC$  zajednički kut oba trokuta,  $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle CEA| = 60^\circ$ ) te vrijedi:

2 BODA

$$|AB| : |AE| = |BD| : |EC|$$

$$9 : (6 + 9) = |BD| : 6$$

$$15 \cdot |BD| = 54$$

$$|BD| = 3.6 \text{ dm}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
23. veljače 2016.

6. razred-rješenja

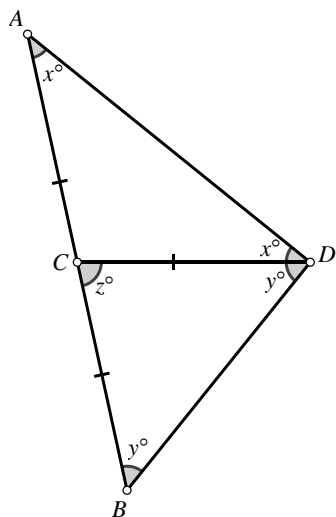
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

Posuda A	Posuda B	
U jednoj litri smjese $\frac{8}{15}l$ crvene $\frac{7}{15}l$ bijele	U jednoj litri smjese $\frac{11}{20}l$ crvene $\frac{9}{20}l$ bijele	2 boda
Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{15}l$ bijele	Iz sedam litara odliveno $7 \cdot \frac{9}{20} = \frac{63}{20}l$ bijele	3 boda
U ostatku, tj. u 8 litara smjese ostalo $8 \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{15}l$ bijele	U ostatku, tj. u 13 litara smjese ostalo $13 \cdot \frac{9}{20} = \frac{117}{20}l$ bijele	3 boda
U posudi A bit će: $\frac{56}{15} + \frac{63}{20} = \frac{413}{60} = 6\frac{53}{60}l$ bijele boje.	U posudi B bit će: $\frac{117}{20} + \frac{49}{15} = \frac{547}{60} = 9\frac{7}{60}l$ bijele boje	2 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:



1 BOD



Trokut  $ACD$  je jednakokračan pa vrijedi  $|\angle ADC| = |\angle CAD| = x^\circ$ . 1 BOD

Kut  $\angle BCD$  je vanjski kut trokuta  $ACD$  koji je nasuprot unutarnjih kutova  $\angle CAD$  i  $\angle ADC$  pa vrijedi  $z^\circ = x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$ . 2 BODA

Trokut  $BCD$  je jednakokračan pa vrijedi  $|\angle DBC| = |\angle CDB| = y^\circ$ . 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je  $180^\circ$  pa za trokut  $BCD$  vrijedi

$$|\angle DBC| + |\angle CDB| + |\angle BCD| = 180^\circ. \quad 2 \text{ BODA}$$

$$y^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

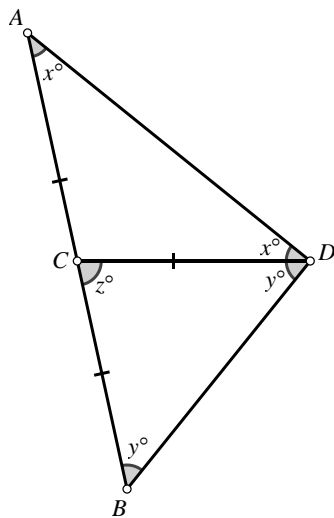
$$2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ + y^\circ = 90^\circ \quad 2 \text{ BODA}$$

Dakle,  $|\angle ADB| = |\angle ADC| + |\angle CDB| = x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Trokut  $ACD$  je jednakokračan pa vrijedi  $|\angle ADC| = |\angle CAD| = x^\circ$ . 1 BOD

Kut  $\angle BCA$  je ispruženi kut pa iz uvjeta zadatka vrijedi da je  $|\angle DCA| = 180^\circ - z^\circ$ .

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je  $180^\circ$  pa za trokut  $ACD$  vrijedi

$$|\angle DCA| + |\angle ADC| + |\angle CAD| = 180^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$180^\circ - z^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$2x^\circ = z^\circ$$

$$x^\circ = \frac{z^\circ}{2}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Analogno, trokut  $BCD$  je jednakokračan pa vrijedi  $|\angle CDB| = |\angle DBC| = y^\circ$ . 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je  $180^\circ$  pa za trokut  $BCD$  vrijedi

$$|\angle BCD| + |\angle CDB| + |\angle DBC| = 180^\circ. \quad 1 \text{ BOD}$$

$$z^\circ + y^\circ + y^\circ = 180^\circ$$

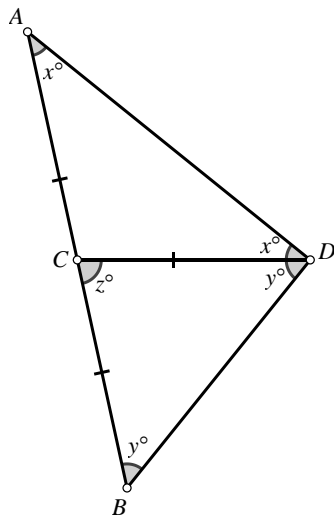
$$2y^\circ = 180^\circ - z^\circ$$

$$y^\circ = \frac{180^\circ - z^\circ}{2}. \quad 2 \text{ BODA}$$

Na kraju,  $|\angle ADB| = x^\circ + y^\circ = \frac{z^\circ}{2} + \frac{180^\circ - z^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:



1 BOD

Trokut  $ACD$  je jednakokračan pa vrijedi  $|\angle ADC| = |\angle CAD| = x^\circ$ . 1 BOD

Trokut  $BCD$  je jednakokračan pa vrijedi  $|\angle DBC| = |\angle CDB| = y^\circ$ . 1 BOD

Zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu je  $180^\circ$  pa za trokut  $ABD$  vrijedi

$$|\angle BAD| + |\angle DBA| + |\angle ADB| = x^\circ + y^\circ + (x^\circ + y^\circ) = 2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ \quad 4 \text{ BODA}$$

odnosno  $x^\circ + y^\circ = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ . 2 BODA

Dakle,  $|\angle ADB| = x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ .

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

### 3. Prvi način:

S obzirom da zbroj tisuću najmanjih uzastopnih pozitivnih cijelih brojeva iznosi

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500500, \quad 2 \text{ BODA}$$

a naših traženih je 31500, najmanji traženi broj je negativan, a najveći pozitivan. 1 BOD

Zbroj  $0 + 1 + 2 + \dots + 999$  se razlikuje od zbroja  $1 + 2 + 3 + \dots + 1000$  jer nema pribrojnik 1000, a ima pribrojnik 0. Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Zbroj  $-1 + 0 + 1 + \dots + 998$  se razlikuje od zbroja  $0 + 1 + 2 + \dots + 999$  jer nema pribrojnik 999, a ima pribrojnik  $-1$ . Dakle, manji je za 1000. 1 BOD

Analogno, svaki sljedeći manji je za 1000. 1 BOD

Kako je  $500\,500 - 31\,500 = 469\,000$  i  $469\,000 : 1000 = 469$ , 2 BODA

najveći od traženih brojeva je  $1000 - 469 = 531$ , 1 BOD

a najmanji je  $1 - 469 = -468$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Razmatranje zbrojeva te zaključivanje o smanjivanju za 1000 boduje se s ukupno 3 boda.

Drugi način:

Prvi broj označimo s  $x$ . Slijede ga  $x + 1, x + 2, \dots, x + 999$ . 1 BOD

Vrijedi  $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 999) = 31\,500$  1 BOD

odnosno  $1000x + (1 + 2 + \dots + 999) = 31\,500$ . 2 BODA

Gaussovom dosjetkom izračunamo da je  $1 + 2 + \dots + 999 = 499\,500$ . 2 BODA

Vrijedi  $1000x + 499\,500 = 31\,500$

$$1000x = -468\,000$$

$$x = -468. \quad 2 \text{ BODA}$$

Tada je  $x + 999 = 531$ . 1 BOD

Najmanji od traženih brojeva je broj  $-468$ , a najveći je  $531$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Neka je  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = 31500$ . 1 BOD

Prema Gaussovoj dosjetki je

$$a_1 + a_{1000} = a_1 + a_1 + 999 = 2a_1 + 999$$

$$a_2 + a_{999} = a_1 + 1 + a_1 + 998 = 2a_1 + 999$$

$$a_3 + a_{998} = a_1 + 2 + a_1 + 997 = 2a_1 + 999$$

...

$$a_{500} + a_{501} = a_1 + 499 + a_1 + 500 = 2a_1 + 999 \quad 3 \text{ BODA}$$

Zbrojivši sve ove jednakosti dobivamo

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} = 500 \cdot (2a_1 + 999) . \quad 1 \text{ BOD}$$

Zato je  $500 \cdot (2a_1 + 999) = 31500 \quad / : 500$

$$2a_1 + 999 = 63$$

$$2a_1 = 63 - 999 = -936 \quad / : 2$$

$$a_1 = -468 \quad 4 \text{ BODA}$$

Slijedi  $a_{1000} = -468 + 999 = 531$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ . 2 BODA

Mala kazaljka se za  $40 \text{ min} = \frac{2}{3} \text{ h}$  pomakne za  $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$ . 2 BODA

Dakle, u 3 sata i 40 minuta mala kazaljka otklonila se  $3 \cdot 30^\circ + 20^\circ = 110^\circ$  od položaja 12 sati.

1 BOD

U jednome satu se velika kazaljka pomakne za puni krug odnosno  $360^\circ$ . 1 BOD

Dakle, u 3 sata i 40 minuta velika se kazaljka pomakla  $240^\circ$  od položaja 12 sati. 2 BODA

Manji kut između kazaljki iznosi  $240^\circ - 110^\circ = 130^\circ$ . 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ . 2 BODA

Mala kazaljka se za 40 min =  $\frac{2}{3}$  h pomakne za  $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$ . 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 3 i 8 na satu je  $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$ . 3 BODA

Veličina kuta između kazaljki iznosi  $150^\circ - 20^\circ = 130^\circ$ . 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Za 40 minuta velika se kazaljka od 12 sati pomakne za  $\frac{40}{60} \cdot 360^\circ = 240^\circ$ . 2 BODA

Za 3 sata mala se kazaljka od 12 sati pomakne za  $\frac{3}{12} \cdot 360^\circ = 90^\circ$ . 2 BODA

Za 40 minuta mala se kazaljka od 3 sata pomakne za  $\frac{40}{12 \cdot 60} \cdot 360^\circ = 20^\circ$ . 3 BODA

Dakle, za 3 sata i 40 minuta mala se kazaljka od 12 sati pomakne za  $90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$ . 1 BOD

Manji kut između kazaljki analognog sata u 3 sata i 40 minuta iznosi  $240^\circ - 110^\circ = 130^\circ$ . 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Veličina kuta između dva uzastopna broja na satu iznosi  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ . 2 BODA

U 3 sata i 40 minuta velika kazaljka je na broju 8.

Veličina kuta između brojeva 8 i 12 na analognom satu je  $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ . 1 BOD

40 minuta je  $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$  sata. 1 BOD

Mala kazaljka za 1 sat prijede  $30^\circ$ , a za 40 minuta prijede  $\frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$ . 2 BODA

Veličina kuta između brojeva 12 i 3 na analognom satu je  $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$ . 1 BOD

U 3 sata i 40 minuta mala kazaljka je od broja 12 udaljena za  $90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$ . 1 BOD

Veći kut između kazaljki je  $120^\circ + 110^\circ = 230^\circ$ . 1 BOD

Manji kut između kazaljki je  $360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$ . 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:

Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  traženi prirodni brojevi i  $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$  njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi  $x_1 + x_2 + \dots + x_{11} = 2016$ . 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  djeljiv s  $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$ , onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s  $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$ . 2 BODA

S obzirom da je  $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ , 1 BOD

onda je  $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$  najmanji mogući umnožak faktora veći od 11. 3 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je

$2016 : 12 = 168$ . 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  traženi prirodni brojevi i  $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$  njihov najveći zajednički djelitelj.

Tada vrijedi  $x_1 + x_2 + \dots + x_{11} = 2016$ . 1 BOD

Kako je svaki od pribrojnika  $x_1, x_2, \dots, x_{11}$  djeljiv s  $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$ , onda je i njihov zbroj odnosno 2016 djeljiv s  $D(x_1, x_2, \dots, x_{11})$ . 2 BODA

Djelitelji broja 2016 su 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, ... 2 BODA

a najmanji među njima koji je veći od 11 je broj 12. 2 BODA

Dakle, najveća vrijednost koju može imati najveći zajednički djelitelj pribrojnika je

$2016 : 12 = 168$ . 3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
23. veljače 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je  $x$  broj krizantema prodanih prošle godine,

onda je  $2x$  broj tulipana, a  $3x$  broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Za zaradu od prodanog cvijeća redom vrijedi

$$x \cdot 9 + 2x \cdot 8 + 3x \cdot 10 = 275\ 000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$9x + 16x + 30x = 275\ 000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$55x = 275\ 000 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$x = 275\ 000 : 55 = 5000 \quad 1 \text{ BOD}$$

Prošle je godine prodano 5 000 krizantema, 10 000 tulipana i 15 000 ruža. 3 BODA

Dakle, ukupno je prodano 30 000 cvjetova. 1 BOD



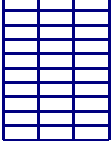
..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Cijena jedne krizanteme je 9 kn, a ruže 10 kn. 1 BOD

Ako je  $x$  broj krizantema prodanih prošle godine, tada je  $2x$  broj tulipana,

a  $3x$  broj ruža prodanih prošle godine. 1 BOD

Neka je zarada od krizantema označena sa   $x$ , od tulipana   $2x$ , a od ruža   $3x$ .

Ukupna zarada od svega cvijeća (u iznosu od 275 000 kn) sastoji se od

$$9 + 16 + 30 = 55 \text{ jednakih dijelova.}$$

Vrijednost svakoga od tih dijelova je  $275\ 000 : 55 = 5000$  kn. 2 BODA

Od krizantema je zarađeno  $5000 \cdot 9 = 45\ 000$  kn, a budući da je cijena jedne krizanteme bila 9 kn,

prodano je ukupno  $45\ 000 : 9 = 5\ 000$  krizantema. 1 BOD

Od tulipana je zarađeno  $5000 \cdot 16 = 80\ 000$  kn, a budući da je cijena jednog tulipana bila 8 kn,

prodano je ukupno  $80\ 000 : 8 = 10\ 000$  tulipana. 2 BODA

Od ruža je zarađeno  $5000 \cdot 30 = 150\ 000$  kn, a budući da je cijena jedne ruže bila 10 kn,

prodano je ukupno  $150\ 000 : 10 = 15\ 000$  ruža. 2 BODA

Ukupno je prodano  $5\ 000 + 10\ 000 + 15\ 000 = 30\ 000$  cvjetova. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Rastavom broja 3915 na proste faktore dobiva se:

$3915 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$ . 2 BODA

Kako se pomoću faktora rastava ne može dobiti niti 30, niti 31, posljednji dan u mjesecu bio je 29.,

1 BOD

a jedino prijestupna veljača ima 29 dana pa je povratak u 3. mjesecu.

1 BOD

Preostali brojevi iz rastava (3, 3 i 5) daju 3 rješenja:

1.) 9 dana zimovanja i petoro djece

Povratak je 8. 3.

2 BODA

2.) 5 dana zimovanja i devetoro djece

Povratak je 4. 3.

2 BODA

3.) 15 dana zimovanja i troje djece

Povratak je 14. 3.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Umnožak brojeva  $\overline{61x}$  i  $\overline{37y1}$  djeljiv je brojem 15 ako vrijedi jedna od mogućnosti:

a) barem jedan broj je djeljiv i brojem 3 i brojem 5 ili

b) jedan broj je djeljiv brojem 3, a drugi brojem 5.

2 BODA

Budući da broj  $\overline{37y1}$  ima zadnju znamenku 1 (znamenku jedinice), taj broj ne može biti djeljiv

brojem 5 (znamenka jedinica mora biti 0 ili 5).

To ima za posljedicu da broj  $\overline{61x}$  mora biti djeljiv brojem 5, tj. mora biti ili  $x=0$  ili  $x=5$ .

2 BODA

Ako je  $x=5$ , onda je prvi broj jednak 615, a on je djeljiv i brojem 5 i brojem 3 (zbroj znamenaka



je 12 ). Dakle, djeljiv je brojem 15 pa će i umnožak broja 615 s bilo kojim brojem biti djeljiv s 15.

Zato znamenka  $y$  u broju  $\overline{37y1}$  može biti bilo koja od znamenaka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9.

3 BODA

Drugi broj može biti: 3701, 3711, 3721, 3731, 3741, 3751, 3761, 3771, 3781, 3791. 1 BOD

Ako je  $x = 0$ , onda je prvi broj jednak 610, a on nije djeljiv brojem 3 jer mu je zbroj znamenaka 7.

Zato broj  $\overline{37y1}$  mora biti djeljiv brojem 3, tj.  $y$  može biti 1, 4 ili 7, odnosno drugi broj je u tom slučaju 3711, 3741 ili 3771.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

#### 4. Prvi način:

Povežemo li svaku razinu s brojem malih trokutića na njoj, uočavamo da vrijedi:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića
3. razina – 5 trokutića
4. razina – 7 trokutića ... 1 BOD

Zaključujemo da će na 5. razini biti 9, na 6. razini 11 trokutića, itd... 1 BOD

tj. da će na  $n$ -toj razini biti  $2n - 1$  trokutić. 1 BOD

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će  $2 \cdot 100 - 1 = 199$  trokutića. 2 BODA

Ukupan broj trokutića dobije se zbrajanjem  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199$ . 1 BOD

Primjenjujući Gaussovu dosjetku dobijemo

$$1 + 3 + 5 + \dots + 197 + 199 = (1 + 199) \cdot (100 : 2) = 200 \cdot 50 = 10000. \quad 3 \text{ BODA}$$

Trokut sastavljen od 100 razina sadrži 10 000 trokutića. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Računanje zbroja  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199$  moguće je na više načina.

Taj zbroj se može izračunati i ovako

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199 &= \\ &= (1 + 199) + (3 + 197) + (5 + 195) + \dots + (99 + 101) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 200 + 200 + 200 + \dots + 200 = (\text{ima } 50 \text{ pribrojnika}) & 1 \text{ BOD} \\ &= 50 \cdot 200 = 10\,000 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

ili ovako

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 195 + 197 + 199 &= \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 199 + 200) - (2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200) = & 1 \text{ BOD} \\ &= (200 \cdot 201) : 2 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100) = \\ &= 100 \cdot 201 - 2 \cdot (100 \cdot 101 : 2) = & 1 \text{ BOD} \\ &= 20\,100 - 10\,100 = 10\,000 & 1 \text{ BOD} \end{aligned}$$

i na druge načine.

Točno određivanje tog zbroja boduje se s 3 boda.

Drugi način:

U 1. razini je 1 trokutić.

U 1. i 2. razini je ukupno  $1 + 3 = 4$  trokutića, pri čemu je  $4 = 2 \cdot 2$ . 1 BOD

U 1., 2. i 3. razini ukupno je  $1 + 3 + 5 = 9$  trokutića, pri čemu je  $9 = 3 \cdot 3$ . 1 BOD

U 1., 2., 3. i 4. razini je ukupno  $1 + 3 + 5 + 7 = 16$  trokutića, pri čemu je  $16 = 4 \cdot 4$ . 1 BOD

U prvih pet razina nalazi se ukupno  $5 \cdot 5 = 25$  trokutića,  
u prvih šest razina broj trokutića je  $6 \cdot 6 = 36$ , 1 BOD

a to znači da trokut sastavljen od 100 razina sadrži  $100 \cdot 100 = 10\,000$  trokutića. 1 BOD

Broj trokutića na pojedinoj razini nalazimo promatranjem početne situacije:

1. razina – 1 trokutić
2. razina – 3 trokutića,  $3 = 2 \cdot 2 - 1$
3. razina – 5 trokutića,  $5 = 2 \cdot 3 - 1$
4. razina – 7 trokutića,  $7 = 2 \cdot 4 - 1 \dots$  1 BOD

Na 5. razini bit će 9 ( $9 = 2 \cdot 5 - 1$ ), na 6. razini 11 ( $11 = 2 \cdot 6 - 1$ ) trokutića, itd....  
tj. da će na  $n$ -toj razini biti  $2n - 1$  trokutić. 2 BODA

Na posljednjoj, stotoj razini, bit će  $2 \cdot 100 - 1 = 199$  trokutića. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Zaključak da je ukupan broj trokutića u  $n$  razina jednak  $n \cdot n$ , odnosno da trokut

sastavljen od 100 razina sadrži  $100 \cdot 100 = 10\,000$  trokutića, boduje se s 5 bodova, neovisno o tome razmatraju li se trokutići sadržani u pet i šest razina ili samo za (nacrtane) četiri razine.

5. Zbroj znamenaka svih jednoznamenkastih brojeva jednak je 45. 1 BOD

Zbroj znamenaka svih dvoznamenkastih brojeva dobit ćemo tako da zbrojimo sve znamenke na mjestu desetica ( $10 \cdot 45$ ) i sve znamenke na mjestu jedinica ( $9 \cdot 45$ ):

$10 \cdot 45 + 9 \cdot 45 = 19 \cdot 45 = 855$ . 1 BOD

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1 do 99 (manjih od 100) jednak je  $45 + 855 = 900$ . 1 BOD

Zbroj znamenaka brojeva od 100 do 999 (svih troznamenkastih brojeva) jednak je zbroju svih znamenaka na mjestu stotica ( $100 \cdot 45$ ) uvećanom za zbroj svih znamenaka u svim dvoznamenkastim „završetcima“ ( $9 \cdot 900$ ):

$100 \cdot 45 + 9 \cdot 900 = 4500 + 8100 = 12\,600$ . 2 BODA

Zbroj znamenaka svih brojeva od 1000 do 1999 jednak je

$1000 \cdot 1 + 900 + 12\,600 = 14\,500$ . 2 BODA

Zbroj znamenaka brojeva od 2000 do 2016 jednak je  $17 \cdot 2 + 45 + 7 + 21 = 107$ . 2 BODA

Ukupan zbroj svih znamenaka je  $900 + 12\,600 + 14\,500 + 107 = 28\,107$ .

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

**Napomena:** Bez obzira na način rješavanja, koraci u rješavanju moraju biti valjano argumentirani.

Ukoliko učenik točno postavi zadatak, a pogriješi samo pri računanju u nekom od dijelova zadatka, za svaku takvu pogrešku oduzeti samo bodove koje donosi taj dio zadatka, ali ne i bod za konačno rješenje.