ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
18. veljače 2014.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako traženi prirodni broj pomnožen s 3 postaje kvadrat, onda taj traženi broj u rastavu na proste faktore ima neparan broj trojki. 1 BOD

S obzirom da taj traženi broj pomnožen s 5 postaje kub, onda je broj trojki u rastavu na proste faktore traženog broja višekratnik broja 3. 1 BOD

Budući da tražimo najmanji broj s tim svojstvima, traženi broj u rastavu na proste faktore ima 3 trojke. 2 BODA

Kako traženi prirodni broj pomnožen s 5 postaje kub, onda taj traženi broj u rastavu na proste faktore ima 2, 5, 8, 11,.. petica. 1 BOD

S obzirom da taj traženi broj pomnožen s 3 postaje kvadrat, onda je broj petica u rastavu na proste faktore traženog broja višekratnik broja 2. 1 BOD

Budući da tražimo najmanji broj s tim svojstvima, traženi broj u rastavu na proste faktore ima 2 petice. 2 BODA

Najmanji prirodni broj s traženim svojstvima je $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 675$. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je n broj sinova i neka je svaki od njih trebao dobiti po x kuna.

Tada vrijedi jednadžba $n \cdot x = 160\,000$. 1 BOD

Kako je jedan sin odustao, nasljedstvo se dijeli između $(n - 1)$ sina, a svaki od njih dobiva $(x + 8\,000)$ kuna. Zato vrijedi jednadžba $(n - 1) \cdot (x + 8\,000) = 160\,000$. 1 BOD

Dalje je $(n - 1) \cdot (x + 8\,000) = n \cdot x$ 1 BOD

$nx + 8\,000n - x - 8\,000 = nx$

$x = 8\,000n - 8\,000$ 1 BOD

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi

$n \cdot (8\,000n - 8\,000) = 160\,000$

$8\,000n^2 - 8\,000n - 160\,000 = 0$

$n^2 - n - 20 = 0$ 2 BODA

$n^2 - 5n + 4n - 20 = 0$

$n \cdot (n - 5) + 4 \cdot (n - 5) = 0$

$(n - 5) \cdot (n + 4) = 0$ 2 BODA

Rješenja jednadžbe su $n_1 = 5$ i $n_2 = -4$, ali negativno rješenje nema smisla.

Otac je imao petoricu sinova. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Za $p = 2$ je $p^{2014} + 1 = 2^{2014} + 1$.

Kako je $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ itd. i $2014 = 503 \cdot 4 + 2$, 1 BOD

onda 2^{2014} ima znamenku jedinica 4 2 BODA

odnosno $2^{2014} + 1$ ima znamenku jedinica 5. 1 BOD

To znači da je djeljiv s 5 te time složen. 1 BOD

Za $p > 2$ je p neparan 1 BOD

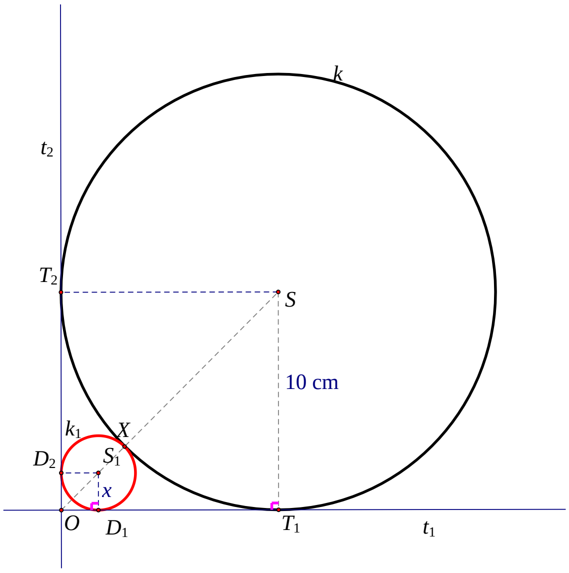
pa je p^{2014} neparan 2 BODA

odnosno $p^{2014} + 1$ paran. 1 BOD

No, to znači i složen. 1 BOD

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4.



2 BODA

Trokut OT_1S je pravokutan pa primjenom Pitagorinog poučka slijedi

$|OS| = \sqrt{|OT_1|^2 + |T_1S|^2} = \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2}$ cm. 1 BOD

Ako točkom S_1 nacrtamo okomicu na tangentu t_1 i presjek označimo D_1, tada je

ΔOD_1S_1 pravokutan 1 BOD

pa ponovno primjenom Pitagorinog poučka slijedi

$|OS_1| = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$. 1 BOD

Dalje vrijedi $|OS| = |OS_1| + |S_1X| + |XS|$ 1 BOD

$$10\sqrt{2} = x\sqrt{2} + x + 10$$

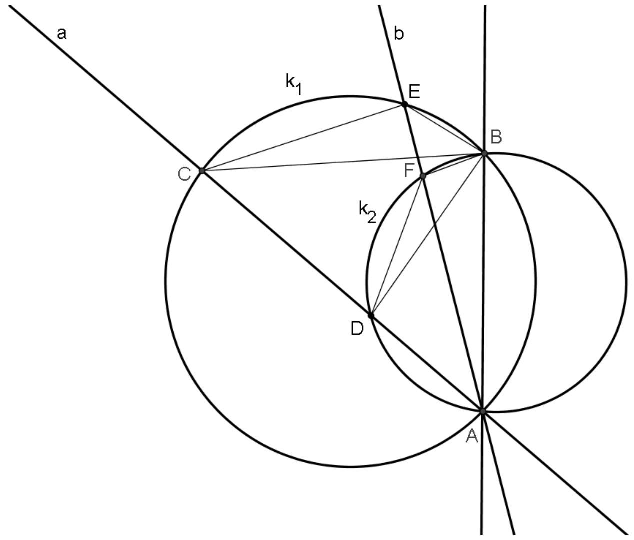
$$x(\sqrt{2}+1) = 10(\sqrt{2}-1)$$ 1 BOD

$$x = \frac{10(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} = \frac{10(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} =$$ 1 BOD

$$= \frac{10(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{10(2-2\sqrt{2}+1)}{2-1} = 10(3-2\sqrt{2}) \text{ cm.}$$ 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



2 BODA

Neka je $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ i $\beta = |\sphericalangle BAE|$.

S obzirom da su $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CEB$ obodni kutovi u k_1 nad $\overline{BC}$ i jedan je šiljasti, a drugi tupi, onda je $|\sphericalangle CEB| = 180° - \alpha$. 1 BOD

Kako su $\sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle DFB$ obodni kutovi u k_2 nad $\overline{BD}$ i jedan je šiljasti, a drugi tupi, onda je $|\sphericalangle DFB| = 180° - \alpha$. 1 BOD

Dakle, $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle DFB|$. 1 BOD

S obzirom da su $\sphericalangle BAE$ i $\sphericalangle BCE$ obodni kutovi u k_1 nad $\overline{BE}$, onda je $|\sphericalangle BCE| = \beta$. 1 BOD

Kako su $\sphericalangle BAF$ i $\sphericalangle BDF$ obodni kutovi u k_2 nad $\overline{BF}$, onda je $|\sphericalangle BDF| = \beta$. 1 BOD

Dakle, $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BDF|$. 1 BOD

Prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\Delta BEC \sim \Delta BFD$. 2 BODA

……………………………………………...………………………………… UKUPNO 10 BODOVA