ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
15. veljače 2013.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $\frac{22.5}{100}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{\sqrt{(340+160)(340-160)}+\sqrt{(650+250)(650-250)}}{(1000-970)^2\cdot(1000-999)^2}\right]^{30}=$ 4 BODA

$=\frac{225}{1000}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{\sqrt{500\cdot180}+\sqrt{900\cdot400}}{30^2\cdot1^2}\right]^{30}=$ 1 BOD

$=\frac{75}{1000}\cdot\left[\frac{\sqrt{2\cdot250\cdot10\cdot18}+\sqrt{900\cdot400}}{900}\right]^{30}=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{\sqrt{2500\cdot36}+\sqrt{900\cdot400}}{900}\right]^{30}=$ 2 BODA

$=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{50\cdot6+30\cdot20}{900}\right]^{30}=$ 1 BOD

$=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{300+600}{900}\right]^{30}=\frac{3}{40}\cdot\left[\frac{900}{900}\right]^{30}=\frac{3}{40}\cdot1^{30}=\frac{3}{40}$ 2 BODA

…………………………………………………………………………... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x broj dana za koji je Ivana pročitala knjigu.

Tada je $\frac{480}{x}$ prosječan broj stranica koje je Ivana pročitala u jednom danu, a $\frac{480}{x-5}$ bi bio prosječan broj dnevno pročitanih stranica knjige da je dnevno čitala 16 stranica više. 2 BODA

Zato vrijedi jednadžba $\frac{480}{x}+16=\frac{480}{x-5}$ 2 BODA

koja nakon sređivanja poprima oblik $x^2-5x-150=0$, 2 BODA

odnosno $(x+10)(x-15)=0$. 2 BODA

Rješenja jednadžbe su $x_1=-10$ i $x_2=15$. 1 BOD

Ivana je pročitala knjigu za 15 dana. 1 BOD

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Jednadžbu $x^2 + 2012 = y^2$ možemo zapisati

$$2012 = y^2 - x^2 \text{ ili } (y-x)(y+x) = 2012.$$ 1 BOD

Dalje je $(y-x)(y+x) = 2 \cdot 2 \cdot 503$. 1 BOD

a) $\begin{array}{l} y+x=2 \\ \underline{y-x=1006} \end{array}$ daje rješenje $(-502,504)$,

$\begin{array}{l} y+x=-2 \\ \underline{y-x=-1006} \end{array}$ daje rješenje $(502,-504)$,

$\begin{array}{l} y+x=-1006 \\ \underline{y-x=-2} \end{array}$ daje rješenje $(-502,-504)$,

$\begin{array}{l} y+x=1006 \\ \underline{y-x=2} \end{array}$ daje rješenje $(502,504)$. 4 BODA

b) $\begin{array}{l} y+x=4 \\ \underline{y-x=503} \end{array}$ (i slične kombinacije) nema rješenje u skupu cijelih brojeva. 2 BODA

c) $\begin{array}{l} y+x=1 \\ \underline{y-x=2012} \end{array}$ (i slične kombinacije) nema rješenje u skupu cijelih brojeva. 2 BODA

…………………………………………………………………..….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Osmerokut podijelimo na dijelove:

- Dva jednakokračna pravokutna trokuta ($A_3A_4A_5$ i $A_1A_7A_8$)
- Pravokutnik $A_2A_3A_5A_6$ 1 BOD

$\Delta A_3A_4A_5$ je jednakokračan pravokutan trokut pa je $P_{\Delta A_3A_4A_5} = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2})^2 = 25 \text{ cm}^2$ 1 BOD

i $|A_3A_5| = \sqrt{|A_3A_4|^2 + |A_4A_5|^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$ 2 BODA

$\overline{A_3A_5}$ je stranica pravokutnika $A_2A_3A_5A_6$ i dio hipotenuze jednakokračnog pravokutnog trokuta

$A_1A_7A_8$ 1 BOD

pa je $P_{A_2A_3A_5A_6} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ cm}^2$ 1 BOD

i $|A_1A_7| = 3 + 10 + 3 = 16 \text{ cm}$ 1 BOD

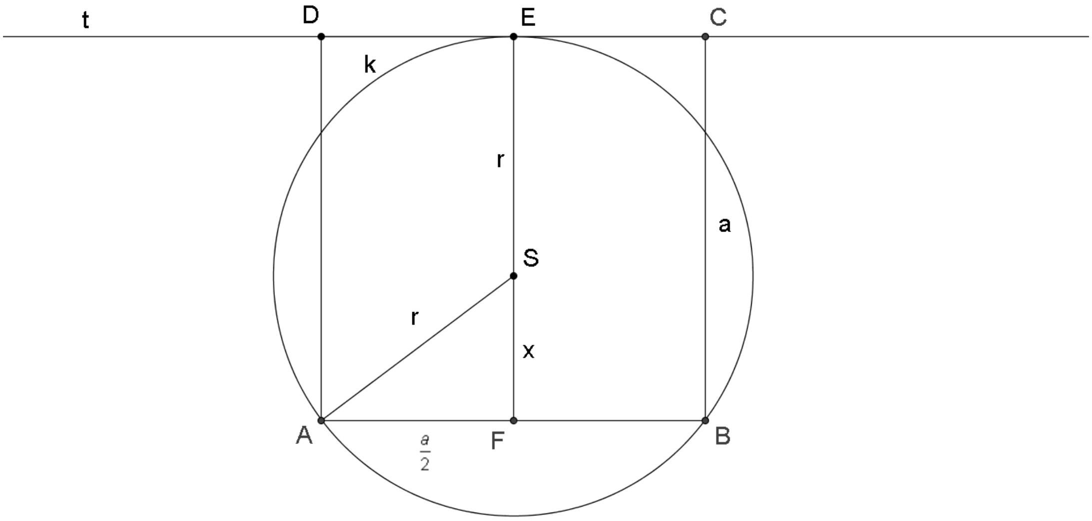
Slijedi $2|A_1A_8|^2 = |A_1A_7|^2$ pa je $|A_1A_8| = 8\sqrt{2} \text{ cm}$ 1 BOD

te $P_{\Delta A_1A_7A_8} = \frac{1}{2} \cdot (8\sqrt{2})^2 = 64 \text{ cm}^2$. 1 BOD

Na kraju, P=25+150+64=239cm^2. 1 BOD

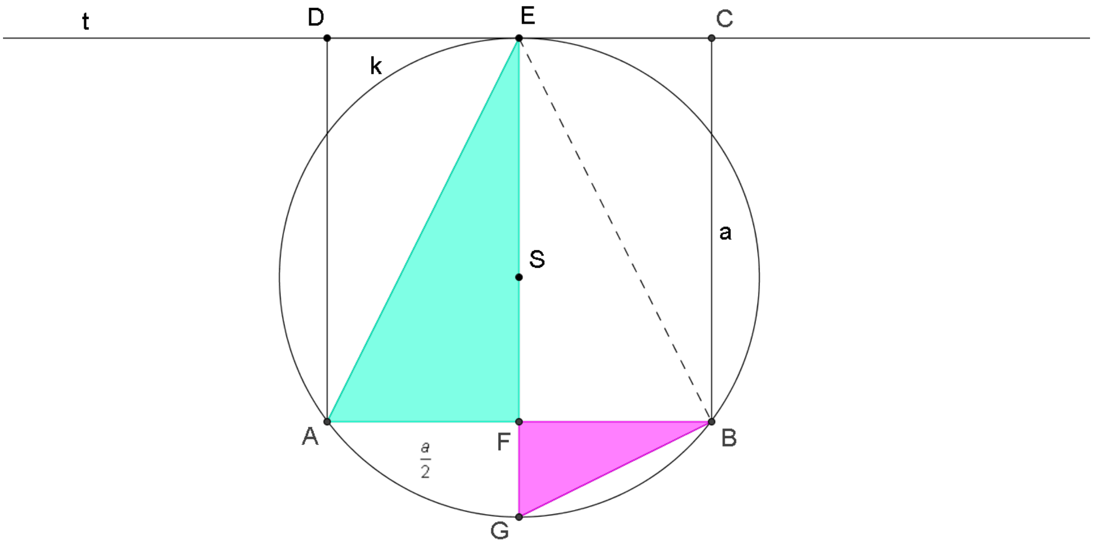
…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka su oznake kao na slici



1 BOD

Tada je četverokut $AFED$ pravokutnik pa je $|EF| = |AD| = a$. 1 BOD



1 BOD

Vrijedi $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BGE|$ jer su to obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{BE}$. 1 BOD

Također je $|\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle GFB| = 90°$. 1 BOD

Prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\Delta AFE \sim \Delta GFB$. 1 BOD

Iz sličnosti slijedi $|AF| : |GF| = |FE| : |FB|$ odnosno $\frac{a}{2} : (2r - a) = a : \frac{a}{2}$. 2 BODA

Na kraju je $a = \frac{8}{5} r$. 2 BODA

………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA